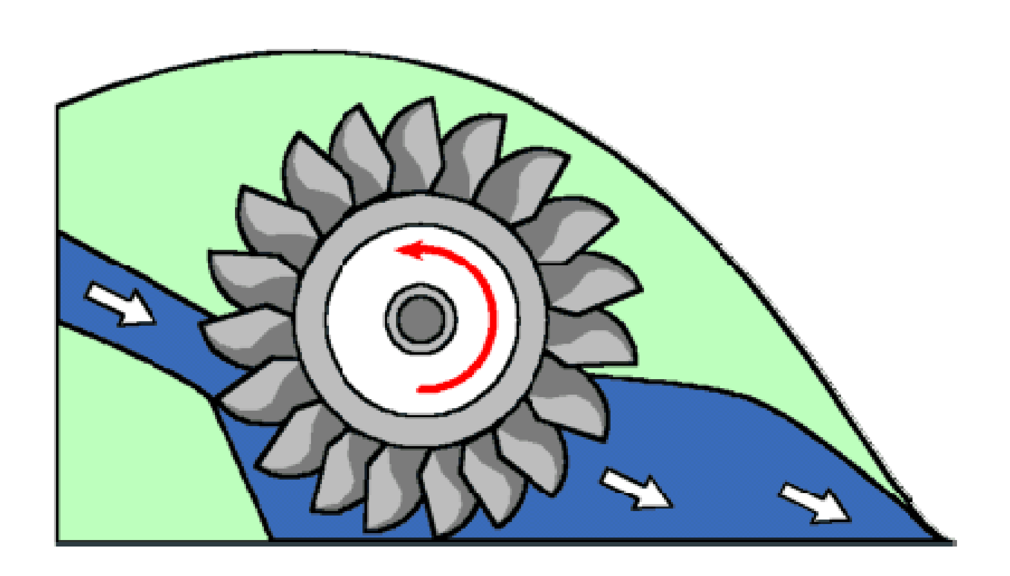
NOTIONS DE
MECANIQUE DES FLUIDES

Cours et Exercices Corrigés

Riadh BEN HAMOUDA



Centre de Publication Universitaire

AVANT-PROPOS

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides. Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

Dans cet ouvrage se trouve exposé l'essentiel de ce qu'un étudiant des Instituts Supérieurs des Etudes Technologiques doit savoir. Les automatismes hydrauliques et pneumatiques sont actuellement très utilisés en industrie. Donc, un technicien quelque soit sa spécialité doit acquérir les notions fondamentales en mécanique des fluides. Nous avons cherché à éviter les développements mathématiques trop abondants et pas toujours correctement maîtrisés par la plupart des techniciens supérieurs et insisté très largement sur les applications industrielles et les problèmes de dimensionnement. Ainsi, l'étude de la mécanique des fluides sera limitée dans cet ouvrage à celle des fluides homogènes. Les lois et modèles simplifiés seront utilisés pour des fluides continus dans une description macroscopique. Egalement, nous limiterons notre étude à celle des fluides parfaits et réels. Dans l'étude dynamique nous serons amenés à distinguer les fluides incompressibles et les fluides compressibles.

Le chapitre 1 constitue une introduction à la mécanique des fluides dans laquelle on classe les fluides parfaits, les fluides réels, les fluides incompressibles et les fluides compressibles et on définit les principales propriétés qui seront utilisées ultérieurement.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique sont expliqués.

Dans le chapitre 3 sont traitées les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier, l'équation de continuité et le théorème de Bernoulli. Elles sont considérées très importantes

dans plusieurs applications industrielles, entre autres dans la plupart des instruments de mesures de pressions et de débits qu'on peut rencontrer dans beaucoup de processus industriels de fabrication chimique surtout.

Dans le chapitre 4 sont démontrés les équations et les théorèmes relatifs à la dynamique des fluides incompressibles réels. Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces équations est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (problèmes de pompage, de turbines, de machines hydrauliques, et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide etc.)

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des fluides compressibles. Les lois et les équations fondamentales de la dynamique ainsi que le théorème de Saint-Venant nécessaires pour traiter un problème d'écoulement de gaz sont démontrés. Certaines notions de thermodynamique, jugées indispensables pour introduire quelques paramètres, sont ajoutées.

La dernière partie de chaque chapitre est consacrée à des exercices corrigés. Ils sont extraits, pour la plupart, des examens et devoirs surveillés que j'ai proposé à l'Institut Supérieur des Etudes Technologique de Djerba. Ils sont choisis pour leur intérêt pratique et pour leur diversité. Chaque exercice traite un domaine particulier d'application qu'un technicien supérieur pourrait rencontrer aussi bien dans le cadre des travaux pratiques à l'ISET qu'en industrie dans sa vie active. Les solutions avec beaucoup de détail, devraient permettre à l'étudiant d'acquérir, en peu de temps, la maîtrise nécessaire des concepts utilisés. Ces exercices permettront également de tester l'avancement de leurs connaissances.

En ce qui concerne la typographie, il a paru opportun de garder les mêmes notations dans la partie exercices corrigés et dans la partie cours. Les points importants sont écrits en caractère gras et les résultats sont encadrés.

Cet ouvrage constitue une première version. Il sera certainement révisé. Les critiques, les remarques et les conseils de tous les compétents du domaine qui veulent nous aider et encourager seront accueillis avec beaucoup de respect et remerciement.

Riadh BEN HAMOUDA, Octobre 2008

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES FLUIDES

1 INTRODUCTION

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.

- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, …Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (CFD ou *Computational Fluid Dynamics* en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les supercalculateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

2 DEFINITIONS

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entres particules élémentaires sont

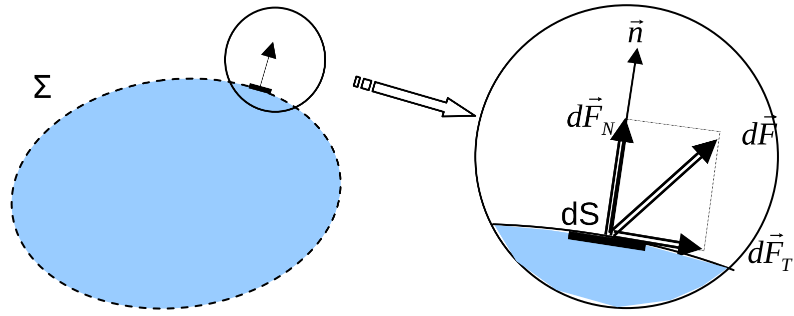
très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Ce cours est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

2.1 Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée Σ fictive ou non.



Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale $\vec{n}$ entre le fluide et le milieu extérieur.

On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes:

- une composante $d\vec{F}_T$ tangentielle à dS.
- une composante $d\vec{F}_N$ normale à dS.

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface dS.

2.2 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

2.3 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

2.4 Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

3 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES

3.1 Masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V}$$

où :

ρ : Masse volumique en (kg/m^3),

m : masse en (kg),

V : volume en (m^3).

Exemples :

Fluide	Masse volumique ρ (kg/m^3)	Type de fluide
Benzène	0,880. 10^3	Incompressible
Chloroforme	1,489. 10^3	
Eau	10^3	
Huile d'olive	0,918. 10^3	
Mercure	13,546. 10^3	
Air	0,001205. 10^3	compressible[1]
Hydrogène	0,000085. 10^3	
Méthane	0,000717. 10^3	

3.2 Poids volumique

$$\varpi = \frac{m.g}{V} = \rho.g$$

ϖ : Poids volumique en (N/m^3).

m : masse en (kg),

g : accélération de la pesanteur en (m/s^2),

V : volume en (m^3).

3.3 Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

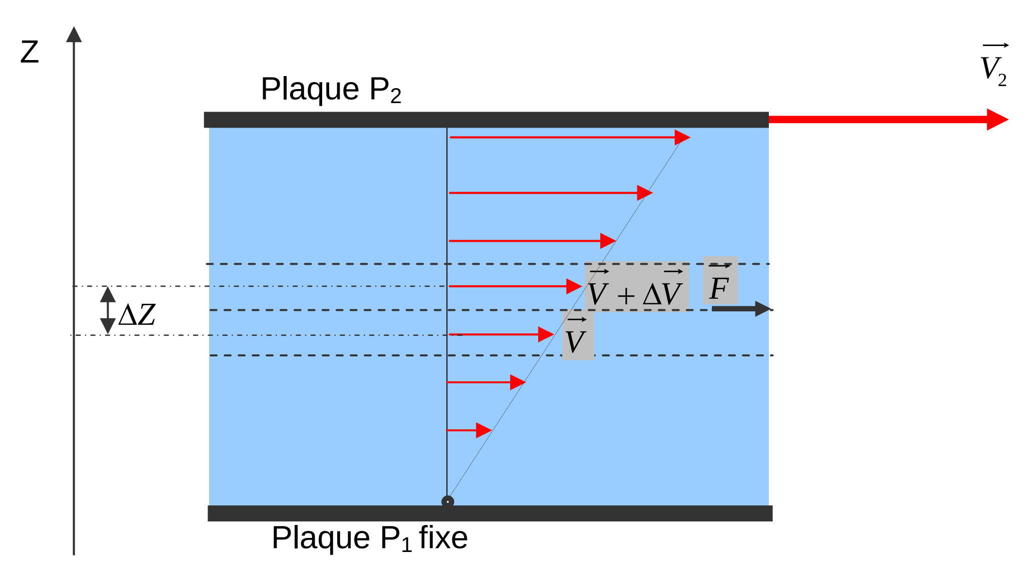
[1] Ces valeurs sont prise à titre indicatif dans les conditions normales de pression et de température.

3.4 Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel en mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide. Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide.

La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes.

Par exemple, si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques P_1 et P_2, tel que la plaque P_1 est fixe et la plaque P_2 est animée d'une vitesse $\overrightarrow{V_2}$.



Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance Z. On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

- **Viscosité dynamique**

La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. ...Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de Δz. La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit Δv, à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz :

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$\boxed{F = \mu . S . \frac{\Delta V}{\Delta Z}} \ *$$

où :

F : force de glissement entre les couches en (N),

μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

S : surface de contact entre deux couches en (m^2),

ΔV : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

ΔZ : Distance entre deux couches en (m).

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa·s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa·s = 1 Pl = 1 kg/m·s

Exemple :

Fluide	**μ (Pa·s)**
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$\approx 100 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$\approx 1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

- **Viscosité cinématique**

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le (m^2/s).

Remarque 1 (unité):

On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

1 St= 10^{-4} m^2/s

Remarque 2 (Influence de la température) :

Lorsque la température augmente, la viscosité d'un fluide décroît car sa densité diminue.

Remarque 3 (différence entre viscosité dynamique et viscosité cinématique)

La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort). En d'autre terme, cette dernière exprime la « rigidité » d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement (voir la relation * à la page 6).

4 CONCLUSION

Les fluides peuvent être classés en ***fluides parfaits*** (sans frottement), ***fluides réels*** (avec frottement), ***fluides incompressibles*** (liquides) et ***fluides compressibles*** (gaz). Les fluides sont caractérisés par les propriétés suivantes: la masse volumique, le poids volumique, la densité et la viscosité. Ces propriétés seront utilisées ultérieurement.

Le comportement mécanique et les propriétés physiques des fluides compressibles et ceux des fluides incompressibles sont différents. En effet, les lois de la mécanique des fluides ne sont pas universelles. Elles sont applicables uniquement pour une classe de fluides donnée. Conformément à la classification qui a été faite, les lois relatives à chaque type de fluides seront exposées dans la suite du cours d'une façon indépendante.

5 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice N°1:

1 ENONCE

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité d=0,7.

On donne :

- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2

- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000\ kg/m^3$

2 REPONSE

$\boxed{\varpi = d.\rho.g}$ A.N. $\boxed{\varpi = 0,7.1000.9,81 = 6867\ N/m^3}$

Exercice N°2:

1 ENONCE

Calculer le poids P_0 d'un volume V=3 litres d'huile d'olive ayant une densité d=0,918.

2 REPONSE

$\boxed{P_o = d.\rho.V.g}$ A.N. $\boxed{P_o = 0,918.1000.3.10^{-3}.9,81 = 27\ N}$

Exercice N°3: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 23-06-2003

1 ENONCE

Quelle est l'influence de la température sur la viscosité ?

2 REPONSE

Si la température augmente la viscosité diminue, et inversement.

Exercice N°4: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 15-01-2004

1 ENONCE

Convertir le stockes en m^2/s.

2 REPONSE

Conversion du stockes : $\boxed{1\,Stockes = 10^{-4}\ m^2/s}$

Exercice N°5: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 24-06-2004

1 ENONCE

Expliquer le principe de mesure d'un viscosimètre à chute de bille.

2 REPONSE

La viscosité cinématique est proportionnelle au temps mis par une bille sphérique en chute pour descendre au fond d'un tube contenant un fluide de viscosité inconnue.

Exercice N°6: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 21-04-2003

1 ENONCE

Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est 0,918 et sa viscosité cinématique est 1,089 Stockes.

2 REPONSE

$\boxed{\mu = \rho.\upsilon}$ A.N. $\boxed{\mu = 918.1{,}089.10^{-4} = 0{,}1\ Pa.s}$

Exercice N°7:

1 ENONCE

Du fuel porté à une température T=20°C a une viscosité dynamique $\mu = 95.10^{-3}\ Pa.s$. Calculer sa viscosité cinématique υ en stockes sachant que sa densité est d=0,95.

On donne la masse volumique de l'eau est $\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$

2 REPONSE

$\boxed{\nu = \dfrac{\mu}{\rho_{eau}.d}}$ A.N. $\boxed{\nu = \dfrac{95.10^{-3}}{1000.0{,}95} = 1.10^{-4}\, m^2/s = 1\ stockes}$

Chapitre 2 : STATIQUE DES FLUIDES

1 INTRODUCTION

Lors d'une plongée sous marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous marins, les réservoirs… etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.

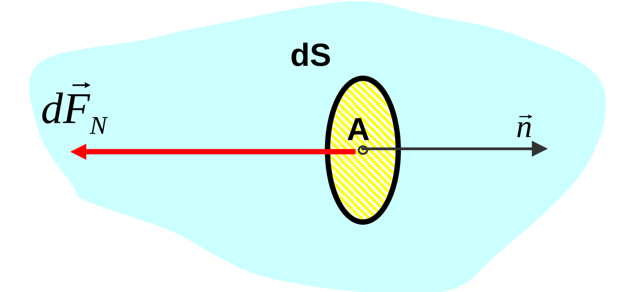
Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués.

Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir…etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

2 NOTION DE PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$$P_A = \frac{\left\| \overrightarrow{dF_N} \right\|}{dS}$$

où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$\overrightarrow{dF_N}$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

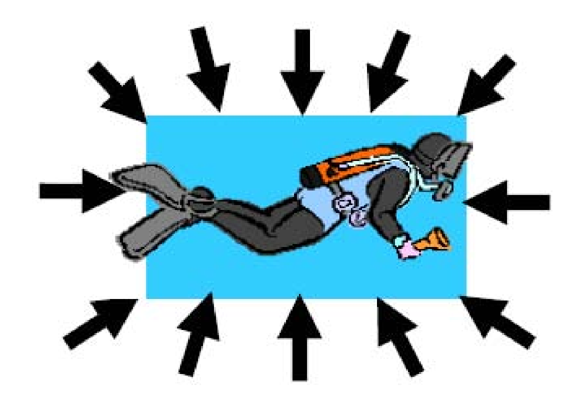
Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exprime par :

$$\overrightarrow{dF_N} = -P_A.dS.\vec{n}$$

<u>Exemple</u> : Chaque cm^2 de surface de notre peau supporte environ 1 kg (force) représentant le poids de l'atmosphère. C'est la pression atmosphérique au niveau de la mer. Nous ne la ressentons pas car notre corps est incompressible et ses cavités (estomac, poumons, etc.) contiennent de l'air à la même pression.

Si on s'élève de 5 000 m, la pression atmosphérique est deux fois plus faible qu'au niveau de la mer car la masse d'air au-dessus de notre tête est alors moitié moindre. D'où la nécessité d'une pressurisation des avions.

En plongée sous-marine, pour mesurer la pression, on utilise le plus souvent le bar: 1 bar = 1 kg / cm^2.



Plus on descend en profondeur, plus la pression est élevée car il faut tenir compte du poids de l'eau au-dessus de nous : à 10 mètres de profondeur, chaque cm^2 de notre peau supportera un poids égal à :

1 cm2 X 10 m (profondeur) = 1 cm2 X 100 cm = 1000 cm3 = l'équivalent du poids d'1 litre d'eau. Le poids d'un litre d'eau douce est égal à 1kg. Le poids d'un litre d'eau de mer est un plus important (à cause du sel qu'elle contient) : 1,026 kg.

En négligeant cette différence, on considérera que de manière générale un litre d'eau pèse 1 kg.

Par conséquent, la pression due à l'eau à 10 m de profondeur est donc de 1 kg / cm^2, c'est-à-dire 1 bar. Si on descend à nouveau de -10 m, la pression augmentera à nouveau de 1 bar. C'est ce qu'on appelle la pression hydrostatique (pression due à l'eau). On l'appelle aussi pression relative car c'est une pression par rapport à la surface.

La pression hydrostatique (comme la pression atmosphérique) s'exerce dans toutes les directions (et pas simplement de haut en bas).

Remarque :

L'unité internationale de pression est le Pascal : 1 Pa = 1 N/m². Cette unité est très petite. On utilise le plus souvent ses multiples. En construction mécanique, résistance des matériaux , etc.,l'unité utilisée est le méga pascal :

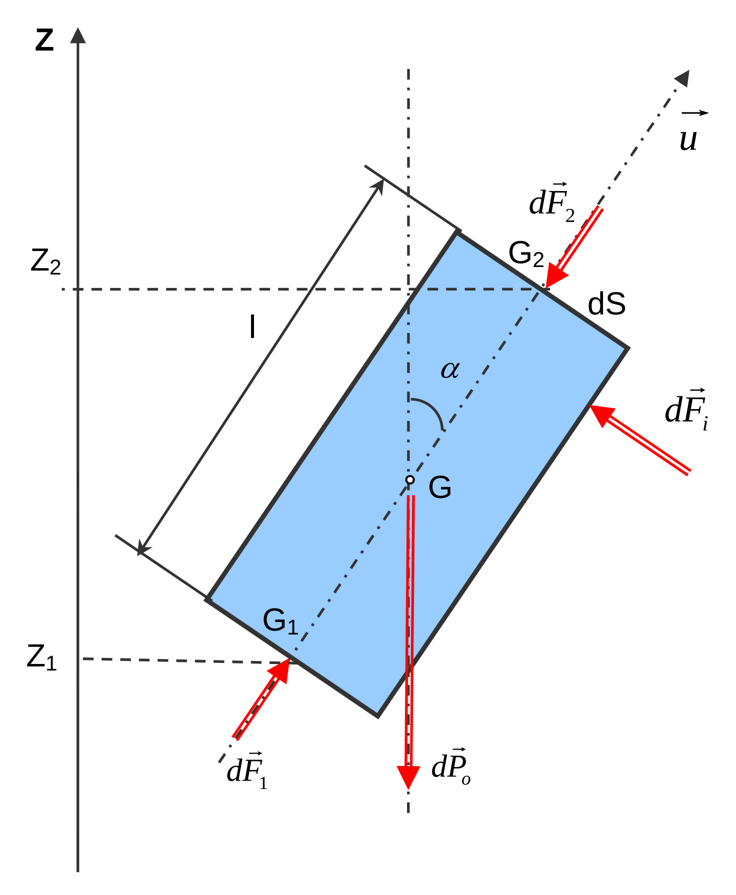
1 MPa= 1 $N/mm^2=10^6$ Pa

En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne :

1 bar = 10^5 Pa.

3 RELATION FONDAMENTALE DE L'HYDROSTATIQUE

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique ϖ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe (G, $\vec{u}$) qui fait un angle α avec l'axe vertical (O, $\vec{Z}$) d'un repère R(O, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$). Soit l la longueur du cylindre et soit dS sa section droite.



Soit G_1 d'altitude Z_1 et G_2 d'altitude Z_2, les centres des sections droites extrêmes. Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- actions à distance : son poids : $\overrightarrow{dP_O} = -\varpi\ l\ dS\ \vec{Z}$
- actions de contact : forces de pression s'exerçant sur :
  - o la surface latérale : $\Sigma \overrightarrow{dF_i}$.
  - o les deux surfaces planes extrêmes : $\overrightarrow{dF_1} = -P_1.dS.(-\vec{u}) = P_1.dS.\vec{u}$ et $\overrightarrow{dF_2} = -P_2.dS.\vec{u}$ .avec P_1 et P_2 les pressions du fluide respectivement en G_1 et en G_2.

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overrightarrow{dP_O} + \Sigma\overrightarrow{dF_i} + \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe de symétrie (G, $\vec{u}$) du cylindre,

$$-\varpi.l.dS.\cos\alpha + P_1.dS - P_2.dS = 0$$

Exprimons la différence de pression $P_1 - P_2$ après avoir divisé par dS et remarqué que $l \cdot \cos\alpha = Z_2 - Z_1$

$\boxed{P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1) = \rho g(Z_2 - Z_1)}$: Relation fondamentale de l'hydrostatique.

Autre forme plus générale :

En divisant les deux membres de la relation précédente par ϖ :

$\frac{P_1}{\varpi} + Z_1 = \frac{P_2}{\varpi} + Z_2$. Ou encore $\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$

Comme G_1 et G_2 ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique ϖ, on peut écrire en un point quelconque d'altitude Z, ou règne la pression p :

$$\boxed{\frac{P}{\varpi} + Z = \frac{P}{\rho g} + Z = Cte}$$

4 THEOREME DE PASCAL

4.1 Enoncé

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

4.2 Démonstration

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$. ΔP_1 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_1.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide

- à l'état initial: $P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1)$ (1)
- à l'état final : $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \varpi.(Z_2 - Z_1)$ (2)

En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient :

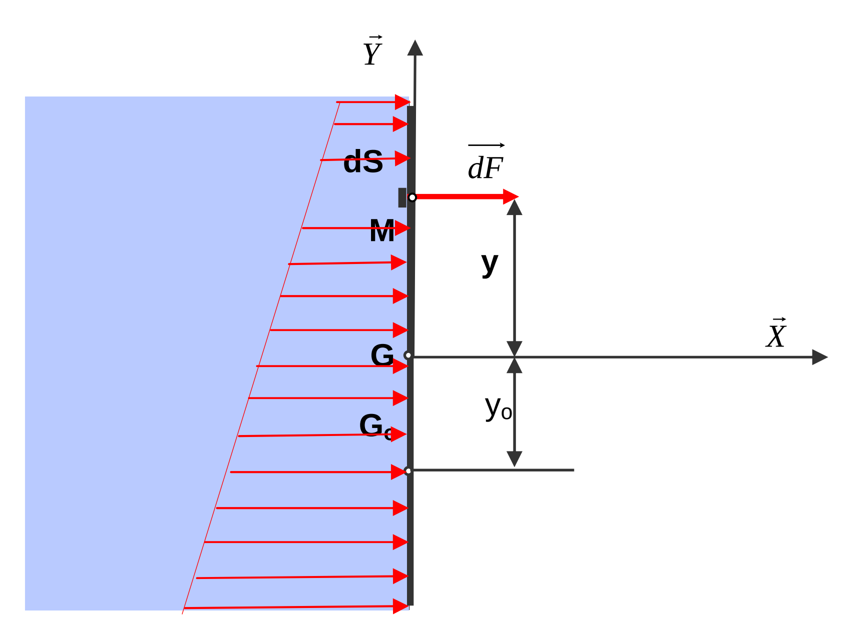
$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$.

D'où $\boxed{\Delta P_1 = \Delta P_2}$

5 POUSSEE D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI VERTICALE

5.1 Hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie (G,$\vec{Y}$). G est son centre de surface. D'un coté de la paroi il y a un fluide de poids volumique ϖ , de l'autre coté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. On désigne par P_G la pression au centre de surface G du coté fluide.



5.2 Eléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression P_G au point G, la pression P_M au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique : $P_M - P_G = \varpi.(Y_G - Y_M)$

Dans le repère (G,$\vec{X}$, $\vec{Y}$,$\vec{Z}$) défini sur la figure : y_G=0 et y_M =y, donc $P_M = P_G - \varpi.y$

Exprimons la force de pression en M : $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

Soit $\{\tau_{poussée}\}$ le torseur associé aux forces de pression relative :

$$\{\tau_{poussée}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \overrightarrow{M_G} = \int_{s} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} \end{Bmatrix}_G$$

5.2.1 Résultante

$$\vec{R} = \int_{(S)} (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$$

que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{R} = \left[P_G.\int_{(S)} dS - \varpi.\int_{(S)} y.dS \right].\vec{X}$$

On note que $\int_{(S)} dS = S$ (aire de la paroi),

$\int_{(s)} y.dS = y_G.S = 0$: Moment statique de la surface S par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$), donc

$$\boxed{\vec{R} = P_G.S.\vec{X}}$$

5.2.2 Moment

$$\overrightarrow{M_G} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF}$$

Dans le repère (G, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) on peut écrire:

$\overrightarrow{GM} = y.\vec{Y}$ et $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$,

donc $\overrightarrow{M_G} = \int_{(S)} \left[y.\vec{Y} \wedge (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X} \right]$

Sachant que $\vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{Z}$ donc $\overrightarrow{M_G} = \left[P_G.\int_{(S)} y.dS - \varpi.\int_{(S)} y^2.dS \right].(-\vec{Z})$

On sait que $\int_{(S)} y.dS = y_G.S = 0$ et $\int_{(S)} y^2.dS = I_{(G,\vec{Z})}$: Moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$) passant par le centre de surface G. Donc

$$\boxed{\overrightarrow{M_G} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}}$$

En résumé :

$$\boxed{\left\{ \tau_{poussee} \right\} = \left\{ \begin{matrix} P_G.S.\vec{X} \\ \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z} \end{matrix} \right\}_G}$$

5.3 Centre de poussée

On cherche à déterminer un point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul.

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe $(G,\vec{Y})$ et il est tel que :

$$\overrightarrow{M_{G_0}} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}.$$

Ecrivons alors que : $\overrightarrow{GG_0} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_G}$

Avec les résultats précédents, on obtient : $y_0.\vec{Y} \wedge P_G.S.\vec{X} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}$,

ce qui conduit à

$$\boxed{y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{P_G.S}}$$

G_o existe, il s'appelle le centre de poussée de la paroi.

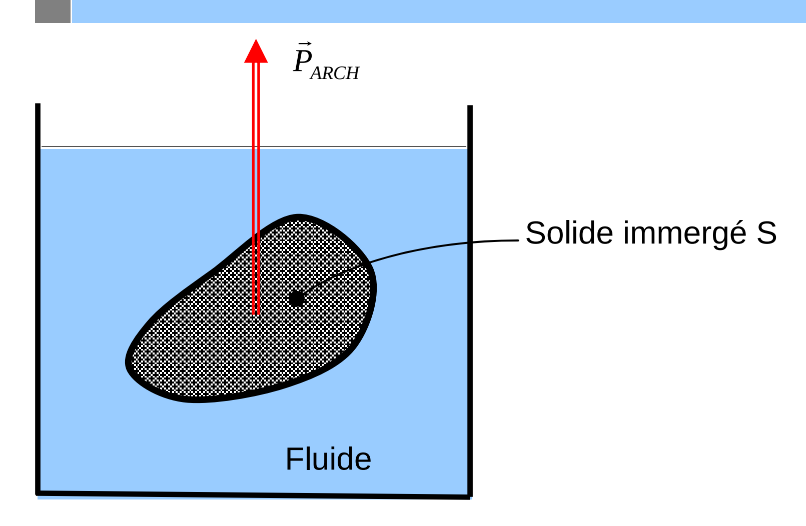
Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G.

6 THEOREME D'ARCHIMEDE

6.1 Énoncé

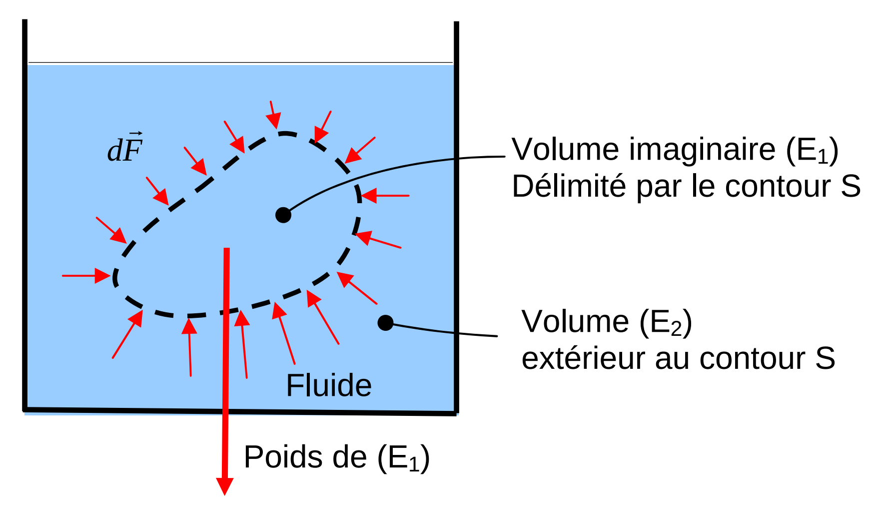
Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

$P_{ARCH}=\rho_{fluide}.V_{imm}.g$



6.2 Démonstration

Dans un fluide (E) de poids volumique ϖ, imaginons un certain volume de fluide (E_1) délimité par un contour fermé (S) :



Si le fluide est au repos, il est évident que (E_1) est en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures suivantes :

- Action de la pesanteur, modélisable par le torseur : $\{\tau(pes \to E_1)\}$
- Action des forces de pression $d\vec{F}$ du fluide (E_2) qui entoure (E_1) modélisable par le torseur : $\{\tau(E_2 \to E_1)\}$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre de (E_1) : $\{\tau(pes \to E_1)\} + \{\tau(E_2 \to E_1)\} = \{\vec{0}\}$

Nous savons qu'en G, centre de gravité du fluide (E_1) le torseur des forces de pesanteur se réduit à un glisseur : $\{\tau(pes \to E_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

Il est donc évident qu'au même point G le torseur des forces de pression $\overrightarrow{dF}$ se réduira lui aussi à un glisseur :

$$\{\tau(E_2 \to E_1)\} = \begin{Bmatrix} \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

L'équation d'équilibre de la portion de fluide (E_1) s'écrit : $\int_{(S)} \overrightarrow{dF} + \vec{P} = \vec{0}$

(E_1) est ici une portion de fluide et $\vec{P}$ est le poids du fluide occupant le volume (E_1). Si le volume (E_1) est occupé par un solide immergé ayant le même contour S, les forces de poussée sur ce contours (S) sont les mêmes , ce qui revient à dire que la force de poussée ne dépend que du volume du fluide déplacé et non pas de la nature du solide immergé (plomb, acier, etc).

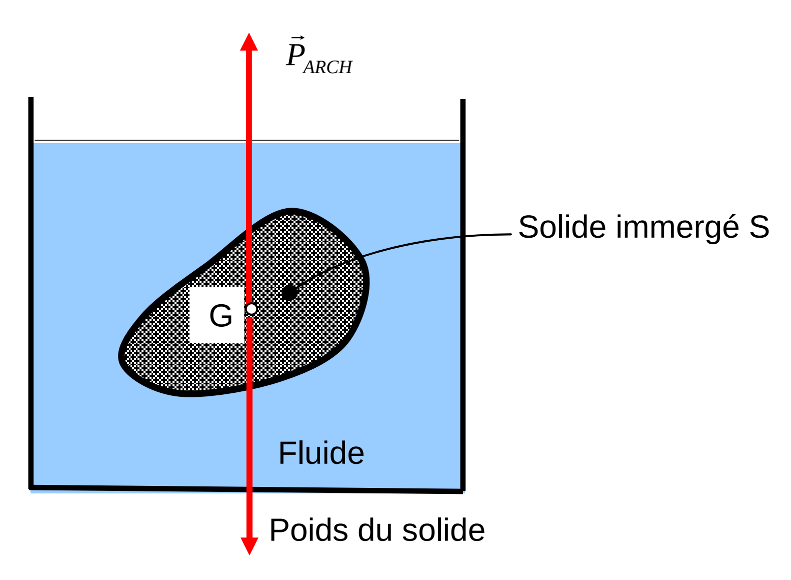
Conclusion :

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à des forces de pression $\overrightarrow{dF}$ dont les actions mécaniques sont modélisables au centre de gravité du fluide déplacé par un glisseur dont la résultante est directement opposée au poids du fluide déplacé.

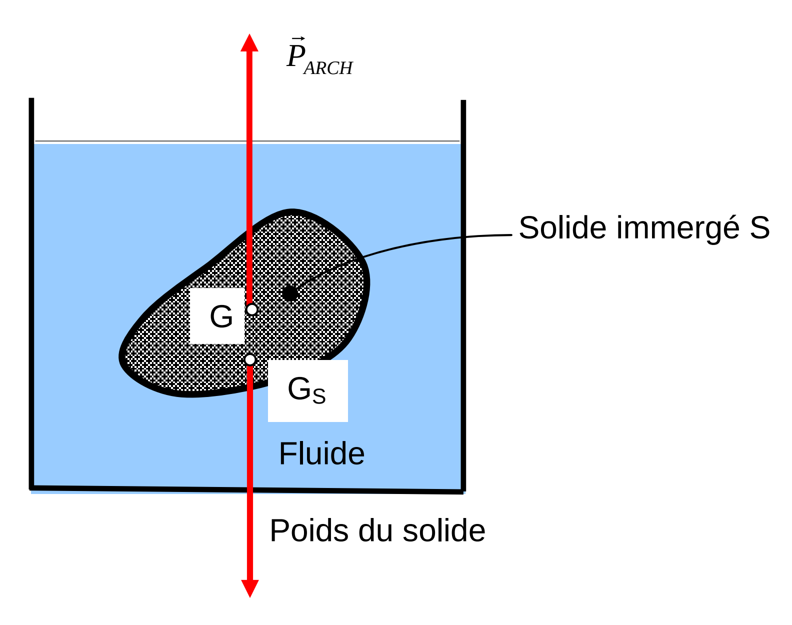
$$\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\} = \begin{Bmatrix} -\vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

Remarques :

- 1er cas : Si le solide immergé est homogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide. L'équilibre du solide est indifférent.



- 2ième cas : Si le solide immergé est hétérogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité G_s du solide. L'équilibre du solide est stable si G est au dessus de G_S. L'équilibre du solide est instable si G est au dessous de G_S.



Position stable

7 CONCLUSION

La statique des fluides est basée principalement sur les résultats suivants:

a) La différence de pression entre deux points est proportionnelle à leur différence de profondeur : $P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1) = \rho g(Z_2 - Z_1)$:

C'est la ***relation fondamentale de l'hydrostatique***,

b) Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en tout autre point d'après le ***théorème de Pascal.***

c) Le torseur associé aux forces de pression d'un fluide sur une paroi plane verticale est : $\{\tau_{poussee}\} = \begin{Bmatrix} P_G.S.\overrightarrow{X} \\ \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z} \end{Bmatrix}_G$

d) La position du centre de poussée. est $y_0 = -\dfrac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{P_G.S}$

e) Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, orientée vers le haut ***c'est la poussée d'Archimède*** et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.

8 EXERCICES D'APLICATION

Exercice N°1: Extrait du devoir surveillé du 30-10-2006

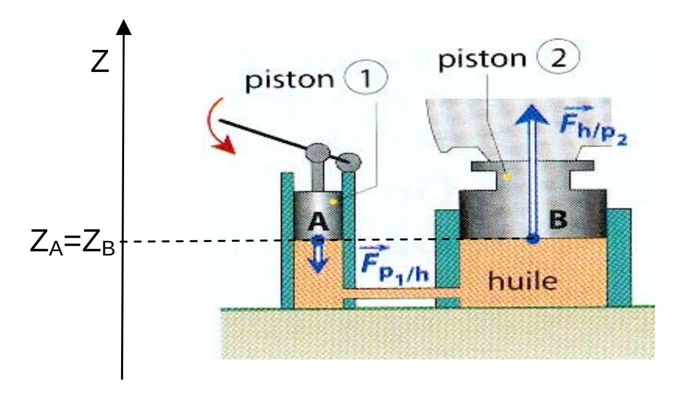
1 ENONCE

La figure ci-dessous représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire.

Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit, au point (A), par une force de pression $\vec{F}_{P_1/h}$ sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force $\vec{F}_{h/P_2}$

On donne :

- les diamètres de chacun des pistons : D_1 = 10 mm; D_2 = 100 mm.
- l'intensité de la force de pression en A : $F_{p1/h}$ = 150 N.



Travail demandé :

1) Déterminer la pression P_A de l'huile au point A.

2) Quelle est la pression P_B ?

3) En déduire l'intensité de la force de pression $F_{h/p2}$.

2 REPONSE

1) Pression P_A de l'huile au point A: $\boxed{P_A = \frac{4.F_{P1/h}}{\pi.D_1^2}}$ A.N $\boxed{P_A = \frac{4.150}{\pi.0{,}01^2} = 19.10^5\ P_a}$

2) RFH entre A et B: $\boxed{P_A - P_B = \varpi.(Z_B - Z_A)}$, or $Z_A = Z_B$ donc $\boxed{P_B = P_A = 19.10^5\ Pascal}$.

3) Force de pression en B : $\boxed{F_{h/P2} = P_B.\frac{\pi.D_2^2}{4}}$ .N. $\boxed{F_{h/P2} = 19.10^5.\frac{\pi.0{,}1^2}{4} = 14922{,}56\ N}$

Commentaire: *On constate que la force $F_{p1/h}$ = 150 N est relativement faible par rapport à $F_{h/P2}$=14922,56 N. Avec ce système nous avons atteint un rapport de*

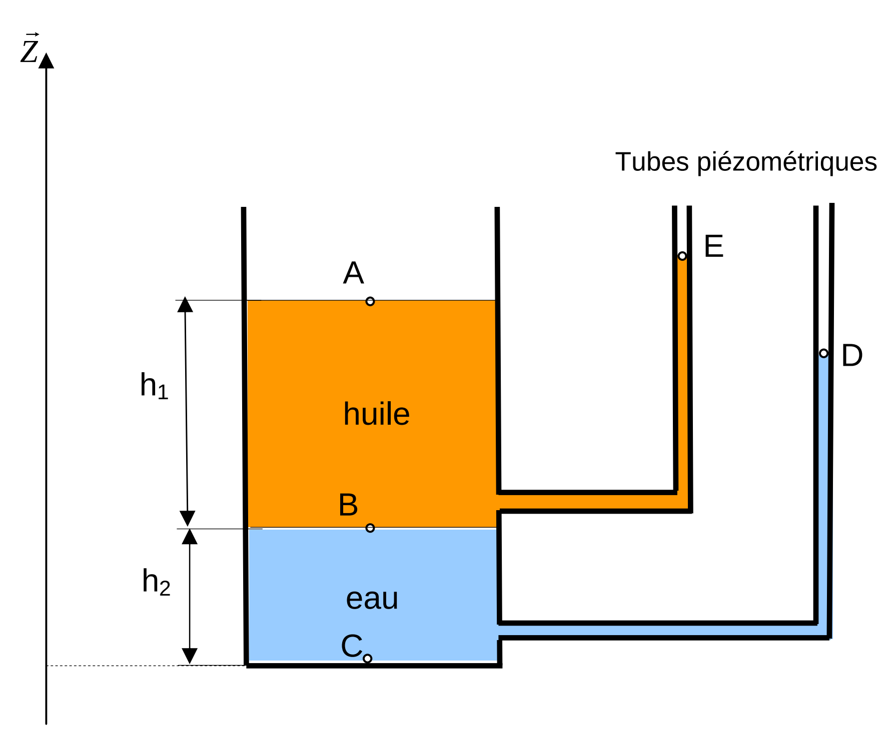
réduction de force de presque 100. Ce rapport correspond au rapport des diamètres des cylindres. On utilise souvent le même principe de réduction d'effort dans plusieurs applications hydrauliques (exemple: presse hydraulique).

Exercice N°2: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2004

1 ENONCE

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique ρ_1=850 kg/m^3 sur une hauteur h_1=6 m,
- de l'eau de masse volumique ρ_1=1000 kg/m^3 sur une hauteur h_2=5 m.



On désigne par:

- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézimétriques,
- $(O, \vec{Z})$ est un axe vertical tel que Z_C=O.

Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points:

1) B et A. En déduire la pression P_B (en bar) au point B.

2) A et E. En déduire le niveau de l'huile Z_E dans le tube piézométrique.

3) C et B. En déduire la pression P_C (en bar) au point C.

4) C et D. En déduire le niveau de l'eau Z_D dans le tube piézométrique.

2 REPONSE

1) RFH entre B et A : $P_B - P_A = \rho_1 g(Z_A - Z_B)$ Or $P_A=P_{atm}$ et $Z_A-Z_B=h_1$

Donc $\boxed{P_B = P_{atm} + \rho_1 g.h_1}$ A.N. $\boxed{P_B = 10^5 + 850.9{,}81.6 = 150031\,Pa = 1{,}5\,bar}$

2) RFH entre A et E : $P_A - P_E = \rho_1 g(Z_E - Z_A)$ Or $P_A=P_E=P_{atm}$

Donc $\boxed{Z_E = Z_A = h_1 + h_2}$ A.N. $\boxed{Z_E = 6 + 5 = 11\,m}$

3) RFH entre C et B : $P_C - P_B = \rho_2 g(Z_B - Z_C)$ Or $Z_B-Z_C=h_2$

Donc $\boxed{P_C = P_B + \rho_2 g.h_2}$ A.N. $\boxed{P_C = 150031 + 1000.9{,}81.5 = 199081\,Pa = 2\,bar}$

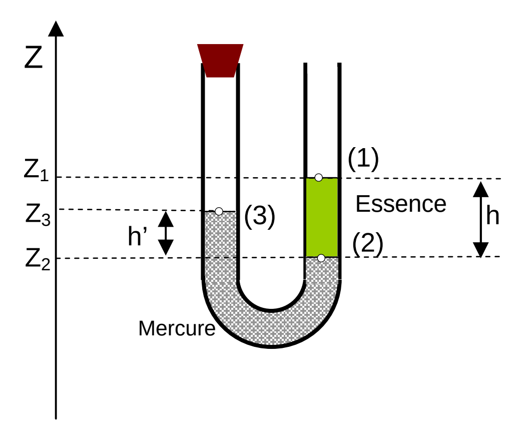
4) RFH entre C et D : $P_C - P_D = \rho_2 g(Z_D - Z_C)$ Or $P_D=P_{atm}$ et $Z_C=0$

Donc $\boxed{Z_D = \dfrac{P_C - P_{atm}}{\rho_2 .g}}$ A.N. $\boxed{Z_D = \dfrac{199081 - 10^5}{1000.9{,}81} = 10{,}1\,m}$

Exercice N°3: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2007

1 ENONCE

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{essence}$=700 kg/m^3.
- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{mercure}$=13600 kg/m^3.

La pression au-dessus de la surface libre (1) est $P_1=P_{atm}$=1 bar.

L'accélération de la pesanteur est g=9,8 m/s^2.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_3 qu'on cherche à calculer.

1) En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) pour l'essence, calculer la pression P_2 (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que h= $(Z_1\text{-}Z_2)$= 728 mm.

2) De même, pour le mercure, calculer la pression P_3 (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que h'= $(Z_3\text{-}Z_2)$= 15 mm.

2 REPONSE

1) RFH pour l'essence : $P_2 - P_1 = \rho_{essence}.g.(Z_1 - Z_2)$

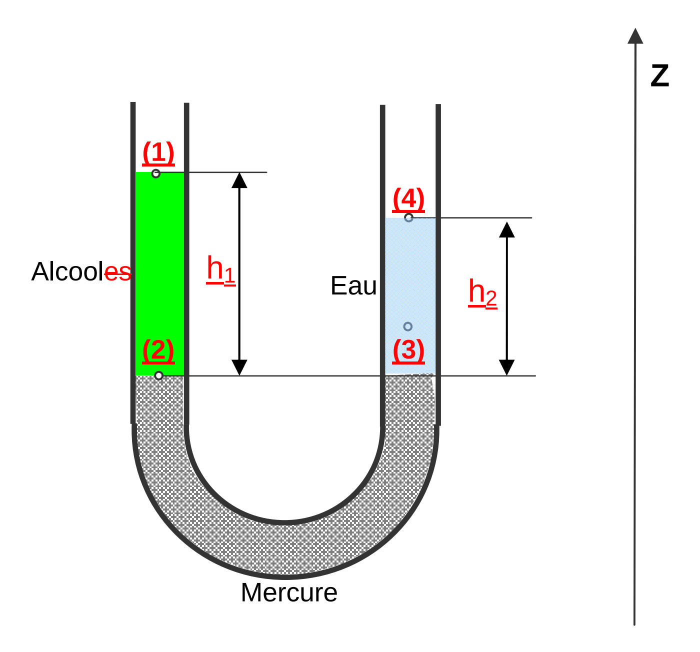
$\boxed{P_2 = P_1 + \rho_{essence}.g.h}$ A.N. $\boxed{P_2 = 10^5 + 700.9,8.0,728 = 1,05.10^5 \ pascal = 1050 \ mbar}$

2) RFH pour le mercure : $P_2 - P_3 = \rho_{mercure}.g.(Z_3 - Z_2)$

$\boxed{P_3 = P_2 - \rho_{mercure}.g.h'}$ A.N. $\boxed{P_3 = 1050.10^3 - 13600.9,8.0,15 = 1,03.10^5 \ pascal = 1030 \ mbar}$

Exercice N°4: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 21-04-2003

1 ENONCE



Un tube en U contient du mercure sur une hauteur de quelques centimètres. On verse dans l'une des branches un mélange d'eau - alcool éthylique qui forme une colonne de liquide de hauteur h_1=30 cm. Dans l'autre branche, on verse de l'eau pure de masse volumique 1000 kg/m^3, jusqu'à ce que les deux surfaces du mercure reviennent dans un même plan horizontal. On mesure alors la hauteur de la colonne d'eau h_2=24 cm.

1) Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour les trois fluides.

2) En déduire la masse volumique du mélange eau – alcool éthylique.

2 REPONSE

1) Relation fondamentale de l'hydrostatique :

Alcool : $P_2 - P_1 = \rho_{alcool}.g.h_1$

Mercure : $P_2 - P_3 = 0$

Eau : $P_3 - P_4 = \rho_{eau}.g.h_2$

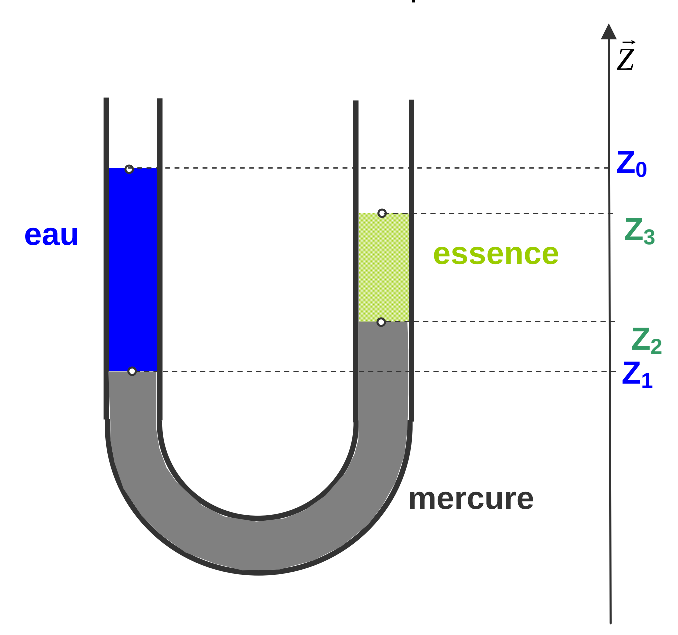
2) On sait que P_1=P_2=P_{atm} et P_2=P_3 donc $\rho_{alcool}.g.h_1 = \rho_{eau}.g.h_2$

Donc $\boxed{\rho_{alcool} = \rho_{eau}.\frac{h_2}{h_1}}$ A.N. $\boxed{\rho_{alcool} = 1000.\frac{24}{30} = 800\ kg/m^3}$

Exercice N°5:

1 ENONCE

On considère un tube en U contenant trois liquides:



- de l'eau ayant une masse volumique ρ_1 = 1000 kg/m^3,
- du mercure ayant une masse volumique ρ_2 = 13600 kg/m^3,
- de l'essence ayant une masse volumique ρ_3 = 700 kg/m^3.

On donne :

$Z_0 - Z_1 = 0{,}2$ m

$Z_3 - Z_2 = 0{,}1$ m

$Z_1 + Z_2 = 1{,}0$ m

On demande de calculer Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3.

2 REPONSE

D'après (RFH), chapitre 2, on peut écrire:

$P_1 - P_0 = \rho_1.g.(Z_0 - Z_1)$

$P_2 - P_1 = \rho_2.g.(Z_1 - Z_2)$

$P_3 - P_2 = \rho_3.g.(Z_2 - Z_3)$

Puisque que $P_0 = P_3 = P_{atm}$, en faisant la somme de ces trois équations on obtient :

$\rho_1.(Z_0 - Z_1) + \rho_2.(Z_1 - Z_2) + \rho_3.(Z_2 - Z_3) = 0$

$\Rightarrow \quad (Z_2 - Z_1) = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}.(Z_0 - Z_1) - \dfrac{\rho_3}{\rho_2}.(Z_3 - Z_2)$ A.N: $(Z_2 - Z_1) = 0{,}0096$ m

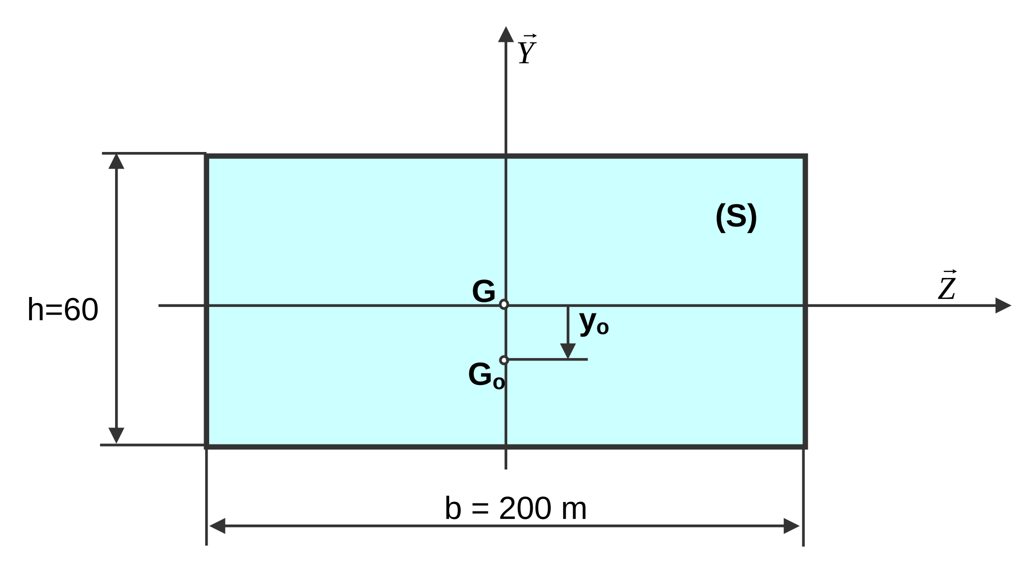
or $(Z_1 + Z_2) = 1{,}0$ m donc $\boxed{Z_2 = 0{,}5048 \text{ m}}$ et $\boxed{Z_1 = 0{,}4952 \text{ m}}$

$(Z_3 - Z_2) = 0{,}1$ m donc $\boxed{Z_3 = 0{,}6048 \text{ m}}$

$(Z_0 - Z_1) = 0{,}2$ m donc $\boxed{Z_0 = 0{,}6952 \text{ m}}$

Exercice N°6:

1 ENONCE



La figure ci-dessus représente un barrage ayant les dimensions suivantes : longueur b=200 m, hauteur h=60 m

Le barrage est soumis aux actions de pression de l'eau.

Le poids volumique de l'eau est : $\varpi = 9{,}81.10^3 \ N/m^3$.

On demande de :

1) Calculer l'intensité de la résultante $\left\|\vec{R}\right\|$ des actions de pression de l'eau.

2) Calculer la position y_0 du centre de poussée G_0.

2 REPONSE

1) Calcul de $\left\|\vec{R}\right\|$:

$\left\|\vec{R}\right\| = P_G.S$,

On applique la RFH entre le point G et un point A à la surface de l'eau on obtient :

$$P_G = \varpi.\frac{h}{2} + P_A$$

En A, sommet du barrage, la pression de l'eau est supposé égale à la pression atmosphérique.

La surface du barrage est : $S = b.h$, donc :

$$\left\|\vec{R}\right\| = (P_{atm} + \varpi.\frac{h}{2}).b.h$$

A.N.

$$\left\|\vec{R}\right\| = (10^5 + 9810.\frac{60}{2}).200.60 = 4{,}73.10^9 \ N$$

2) Calcul de y_0 :

$$y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{\left\|\vec{R}\right\|}$$

Le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})} = \frac{b.h^3}{12}$, donc

$$y_0 = -\frac{\varpi.\frac{bh^3}{12}}{\left\|\vec{R}\right\|}$$

A.N.

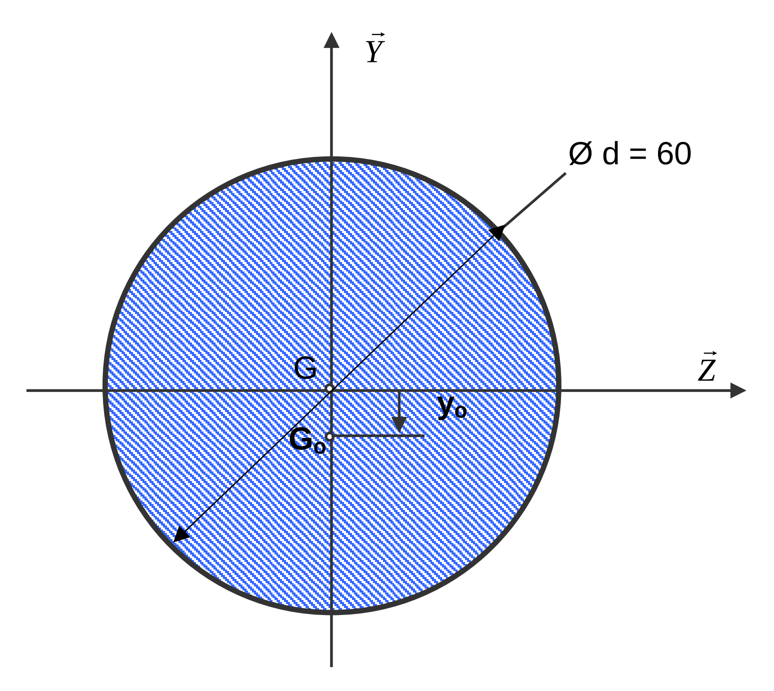
$$y_0 = -\frac{9810.\frac{200.60^3}{12}}{4{,}73.10^9} = -7{,}46 \ m$$

Commentaire: *On remarque que le centre de poussée est très au dessous du centre de surface. Dans le calcul de stabilité du barrage il est hors de question de confondre ces deux points.*

Exercice N°7:

1 ENONCE

Un piston de vérin a un diamètre d=60 mm. Il règne au centre de surface G du piston une pression de 40 bar, soit environ P_G=4 MP_a.



L'huile contenue dans le vérin a un poids volumique $\varpi = 9{,}81.0{,}8.10^3\ N/m^3$.

On demande de :

1) Calculer l'intensité de la résultante $\left\|\vec{R}\right\|$ des actions de pression de l'huile.

2) Calculer la position y_0 du centre de poussée G_0.

2 REPONSE

1) Calcul de $\left\|\vec{R}\right\|$:

$\left\|\vec{R}\right\| = P_G.S$ avec $S = \dfrac{\pi.d^2}{4}$, donc $\boxed{\left\|\vec{R}\right\| = P_G.\dfrac{\pi.d^2}{4}}$ A.N. $\boxed{\left\|\vec{R}\right\| = 11{,}3.10^3\ N}$

2) Calcul de y_0 :

$y_0 = -\dfrac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{\left\|\vec{R}\right\|}$ avec $I(G,\vec{z}) = \dfrac{\pi.d^4}{64}$, donc $\boxed{y_0 = -\dfrac{\varpi.\dfrac{\pi.d^4}{64}}{\left\|\vec{R}\right\|}}$

A.N. $\boxed{y_0 = -\dfrac{9810.0{,}8.\dfrac{\pi.0{,}06^4}{64}}{11{,}3.10^3} = 4{,}4.10^{-7}\,m}$

Commentaire: *On remarque que le centre de poussée est très voisin du centre de surface. Dans le calcul de poussée du vérin il est, donc, tout à fait normal de les confondre.*

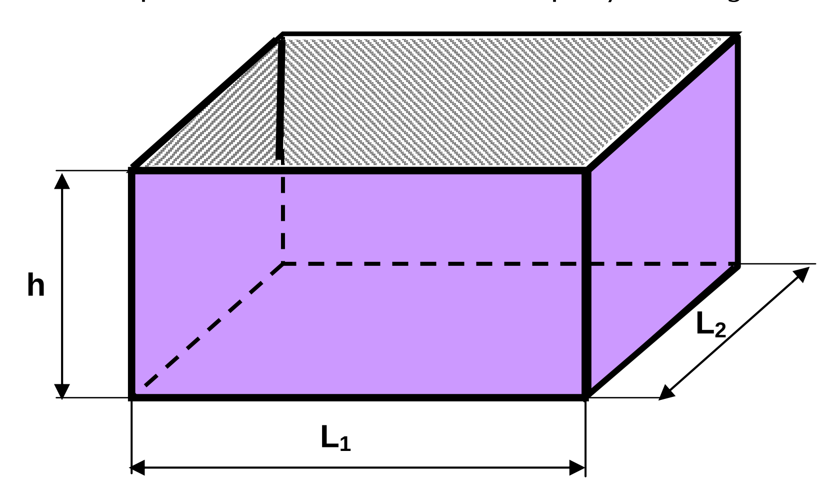
Exercice N°8: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 21-04-2003

1 ENONCE

Un réservoir de forme parallélépipédique ayant les dimensions suivantes :

- hauteur h = 3m,
- longueur L_1= 8 m,
- largeur L_2 = 6 m.

est complètement remplie d'huile de masse volumique $\rho = 900\ kg/m^3$.



1) Calculer le module de la résultante des forces de pression sur chaque surface du réservoir (les quatre faces latérale et le fond).

2) Déterminer pour les surfaces latérales la position du point d'application (centre de poussée).

2 REPONSE

1) $\left\|\vec{R}\right\| = P_G.S$

Sur les parois latérales :

$\left\|\vec{R_1}\right\| = \varpi.\frac{h}{2}.h.L_1 = \frac{1}{2}.\rho.g.h^2.L_1$ A.N. $\left\|\vec{R_1}\right\| = \frac{1}{2}.900.9{,}81.3^2.8 = 317844\ N$

$\left\|\vec{R_2}\right\| = \varpi.\frac{h}{2}.h.L_2 = \frac{1}{2}.\rho.g.h^2.L_2$ A.N. $\left\|\vec{R_2}\right\| = \frac{1}{2}.900.9{,}81.3^2.6 = 238383\ N$

Sur le fond du réservoir :

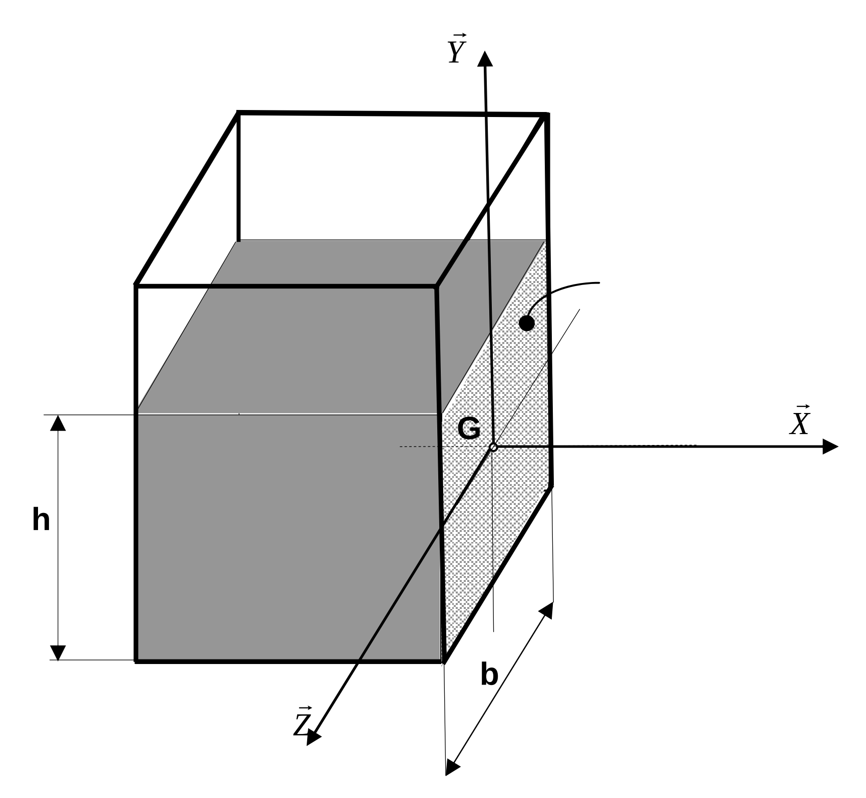
$\left\|\overrightarrow{R_3}\right\| = \varpi.h.L_1.L_2 = \rho.g.h.L_1L_2$ A.N. $\left\|\overrightarrow{R_3}\right\| = 900.9,81.3.6.8 = 1271376\ N$

2) Les points d'application sont à $\frac{h}{3} = 1\,m$ du fond pour les faces latérales.

Exercice N°9: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 02-06-2008

1 ENONCE

On considère un récipient en forme de parallélépipède de largeur b=2 m, ouvert à l'air libre et rempli jusqu'à une hauteur h=1,5 m avec du mercure de masse volumique ρ=13600 kg/m^3.



On désigne par:

- G le centre de gravité de la surface mouille S.
- $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ un R.O.D. où $\vec{X}$ est orthogonal à S et $\vec{Y}$ est vertical.

On donne l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2.

1) En appliquant la RFH entre un point M de la surface libre et le point G, calculer la pression $\mathbf{P_G}$.

2) Déterminer l'intensité de la résultante $\vec{R}$ des forces de pression agissant sur S.

3) Calculer le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ de la surface S.

4) Calculer la position $\mathbf{Y_0}$ du centre de poussée.

2 REPONSE

1) RFH entre G et M : $P_G - P_M = \rho.g.(Y_M - Y_G)$ or Y_M=h/2 , Y_G=0 et P_M=P_{atm} donc

$$P_G = P_{atm} + \rho.g.\frac{h}{2}$$

A.N. $P_G = 10^5 + 13600.9{,}81.\frac{1{,}5}{2} = 2.10^5 = 2\ bar$

2) Intensité de la résultante : $\left\|\vec{R}\right\| = P_G.S = P_G.bh$

A.N. $\left\|\vec{R}\right\| = 2.10^5.2.1{,}5 = 6.10^5\ N$

3) Moment quadratique : $I_{(G,\vec{Z})} = \frac{bh^3}{12}$ A.N. $I_{(G,\vec{Z})} = \frac{2.1{,}5^3}{12} = 0{,}5625\ m^4$

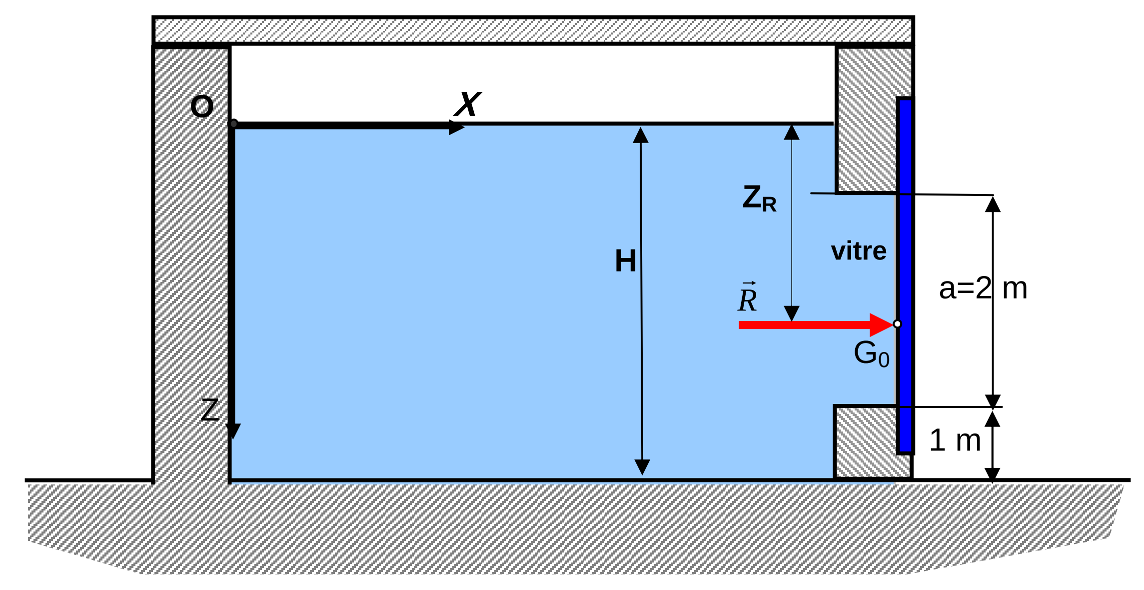
4) Position du centre de poussée : $Y_o = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{\left\|\vec{R}\right\|}$

A.N. $Y_o = -\frac{13600.9{,}81.0{,}5625}{6.10^5} = -0{,}125\ m$

Exercice N°10: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 23-05-2003

1 ENONCE

On considère un aquarium géant utilisé dans les parcs d'attraction représenté par la figure suivante :



Il est rempli d'eau à une hauteur **H= 6m**, et équipé d'une partie vitrée de forme rectangulaire de dimensions **(2m x 3m)** qui permet de visualiser l'intérieur.

Travail demandé :

1) Représenter le champ de pression qui s'exerce sur la partie vitrée.

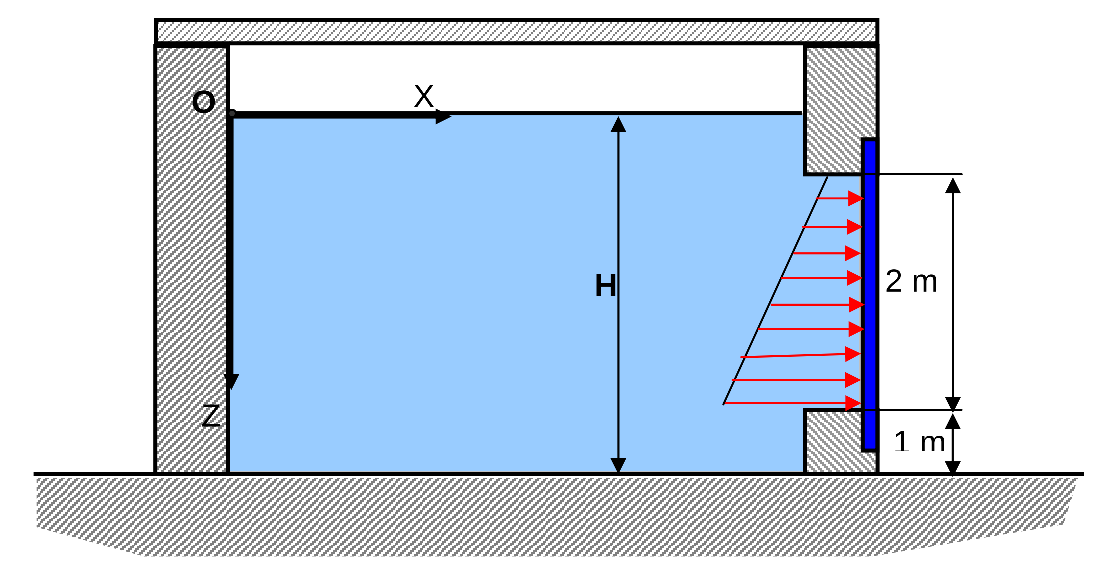
2) Déterminer le module de la résultante $\vec{R}$ des forces de pression.

3) Calculer la profondeur Z_R du centre de poussée.

4) Reprendre les questions 2. et 3. en changeant la forme rectangulaire de la partie vitrée par une forme circulaire de diamètre d= 2m.

2 REPONSE

1) Le champ de pression agissant sur le vitrage a l'allure suivante :



2) Si on néglige la pression atmosphérique, la résultante des forces de pressions :

$\vec{R} = P_G.S.\vec{X}$ avec $S = a.b$ donc $\boxed{\|\vec{R}\| = \rho.g.S.Z_g}$ A.N. $\boxed{\|\vec{R}\| = 1000.9,81.6.4 = 235440\ N}$

3) La profondeur Z_R du centre de poussée est donnée par l'expression suivante :

$\boxed{Z_R = \frac{I_{(G,\vec{Y})}}{Z_G.S} + Z_G}$ ou $\boxed{I_{(G,\vec{Y})} = \frac{2^3.3}{12} = 2\ m^4}$ A.N. $\boxed{Z_R = 4{,}0833\ m}$

4) Cas d'une partie vitrée de forme circulaire de diamètre d= 2 m :

$\boxed{S = \frac{\pi.d^2}{4} = 3{,}141\ m^2}$, $\boxed{I_{(G,\vec{Y})} = \frac{\pi.d^4}{64} = 0{,}785\ m^4}$

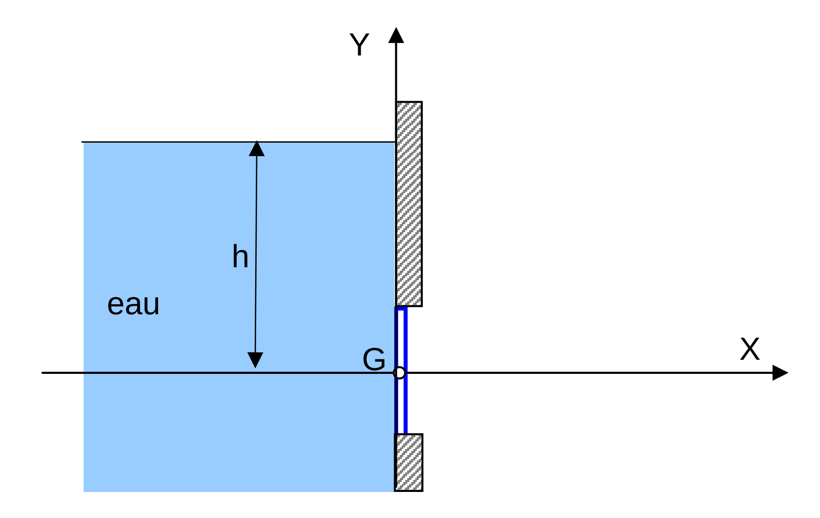
$\boxed{\|\vec{R}\| = \rho.g.S.Z_g}$ A.N. $\boxed{\|\vec{R}\| = 123252\ N}$

$$Z_R = \frac{I_{(G,\vec{Y})}}{Z_G . S} + Z_G$$ A.N. $$Z_R = \frac{0{,}785}{4.3{,}14} + 4 = 4{,}0625\, m$$

Exercice N°11: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 30-10-2006

1 ENONCE

Une vanne de vidange est constituée par un disque de diamètre d pivotant autour d'un axe horizontal (G, $\vec{Z}$). Le centre G du disque est positionné à une hauteur h=15,3 m par rapport au niveau d'eau.



On donne :

- le diamètre de la vanne : d = 1 m,
- la pression atmosphérique P_{atm} = 1 bar,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2,
- la masse volumique de l'eau ρ=1000 kg/m^3.

Travail demandé :

1) Déterminer le poids volumique de l'eau.

2) Déterminer la pression P_G de l'eau au point G.

3) Calculer l'intensité de la poussée $\left\|\vec{R}\right\|$ sur le disque.

4) Calculer le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ du disque par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$).

5) Calculer le moment $\vec{M}_G$ des forces de pression agissant sur le disque.

6) Déterminer la position du centre de poussée y_0.

2 REPONSE

1) Poids volumique $\boxed{\varpi = \rho . g}$

A.N. $\varpi = 1000.9{,}81 = 9810\ N/m^3$

2) Pression au point G $P_G = P_{atm} + \varpi.h$.

A.N. $P_G = 10^5 + 9810.15{,}3 = 2{,}5.10^5\ Pascal$

3) Intensité de la poussée $\left\|\vec{R}\right\| = P_G.\dfrac{\pi.d^2}{4}$

A.N. $\left\|\vec{R}\right\| = 2{,}5.10^5.\dfrac{\pi.1^2}{4} = 196349{,}5\ N$

4) Moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})} = \dfrac{\pi.d^4}{64}$

A.N. $I_{(G,\vec{Z})} = \dfrac{\pi.1^4}{64} = 0{,}049\ m^4$

5) Moment des forces de pression $\vec{M}_G = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}$

A.N. $\left\|\vec{M}_G\right\| = 9810.0{,}049 = 480{,}6\ N.m$

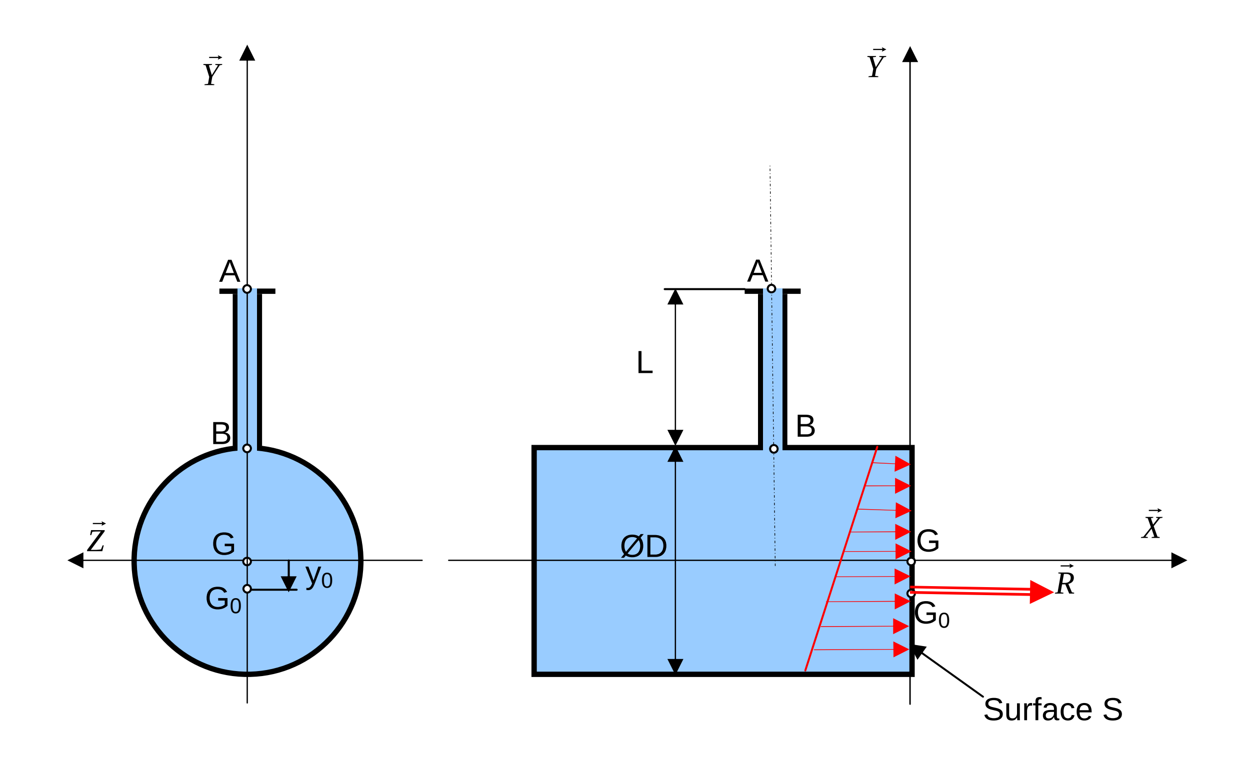
6) Position centre de poussée : $y_c = -\dfrac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{\left\|\vec{R}\right\|}$

A.N. $y_c = -\dfrac{9810.0{,}049}{196349{,}5} = 2{,}44.10^{-3}\,m$

Exercice N°12: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2004

1 ENONCE

Une conduite AB de longueur L =646 mm est soudée sur un réservoir cylindrique de diamètre D = 3 m. Le réservoir est rempli jusqu'au point A avec du pétrole brut de densité d = 0,95.



Le repère (G, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) a été choisit tel que G est le centre de la surface circulaire S (fond de réservoir). (G, $\vec{X}$) est l'axe de révolution du réservoir et (G, $\vec{Y}$) est vertical.

On donne:

- la masse volumique de l'eau ρ_{eau}=1000 kg/m^3 ,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m.s^{-2},
- la pression P_A=P_{atm}=1bar.

Travail demandé :

1) Quelle est la masse volumique ρ du pétrole?

2) En déduire son poids volumique ϖ .

3) En appliquant la RFH entre G et A, déterminer la pression P_G au point G.

4) Calculer le module de la résultante $\vec{R}$ des forces de pression du pétrole sur le fond du réservoir.

5) Calculer le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ de la surface circulaire S par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$).

6) Déterminer la position y_0 du centre de poussée G_0.

2 REPONSE

1) Masse volumique du pétrole: $\rho = d.\rho_{eau}$ A.N. $\rho = 0{,}95.9{,}81 = 950\ kg/m^3$

2) Poids volumique : $\varpi = \rho.g$ A.N. $\varpi = 950.9{,}81 = 9319{,}5\ N/m^3$

3) RFH entre G et A : $P_G - P_A = \rho.g(Y_A - Y_G)$ Or $P_A = P_{atm}$ et $Y_G = 0$

Donc $P_G = P_{atm} + \rho.g.(L + \frac{D}{2})$

A.N. $P_G = 10^5 + 950.9{,}81.(0{,}646 + 1{,}5) = 119999{,}64\ Pa = 1{,}2\ bar$

4) Intensité de la résultante : $\|\vec{R}\| = P_G.\frac{\pi.D^2}{4}$

A.N. $\|\vec{R}\| = 119999{,}64.\frac{\pi.3^2}{4} = 848227{,}47\ N$

5) Moment quadratique: $I_{(G,\vec{Z})} = \frac{\pi.D^4}{64}$ A.N. $I_{(G,\vec{Z})} = \frac{\pi.3^4}{64} = 3{,}976\ m^4$

6) Position du centre de poussée : $y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{\|\vec{R}\|}$

A.N. $y_0 = -\frac{9319{,}5.3{,}976}{848227{,}47} = -0{,}04368\ m$

Exercice N°13: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2007

1 ENONCE

Suite au naufrage d'un pétrolier, on envoie un sous-marin pour inspecter l'épave et repérer d'éventuelles fuites. L'épave repose à une profondeur h= 1981 m.

On donne :

- l'accélération de la pesanteur g= 9,8 m/s^2,
- la pression atmosphérique P_{atm}= 1 bar,
- la masse volumique de l'eau de mer est ρ = 1025 kg/m^3,

Le sous marin est équipé d'un hublot vitré de diamètre d= 310 mm., de centre de gravité G, et de normale ($(G,\vec{X})$ est situé dans un plan vertical $(G,\vec{Y},\vec{Z})$. L'axe $(G,\vec{Z})$ est vertical.

Travail demandé :

1) Calculez la pression P_G de l'eau à cette profondeur au point G.

2) Quelle est l'intensité ($\|\vec{R}\|$) de la résultante des actions de pression de l'eau sur le hublot ?

3) Calculer le moment quadratique $I_{(G,\vec{Z})}$ du hublot.

4) Quelle est l'intensité ($\|\vec{M}_G\|$) du moment des actions de pression de l'eau sur le hublot ?

2 REPONSE

1) RFH entre le point G et un point M à la surface : $P_G - P_M = \rho.g.(Z_M - Z_G) = \rho.g.h$

$$\boxed{P_G = P_{atm} + \rho.g.h}$$

A.N. $\boxed{P_G = 10^5 + 1025.9,8.1981 = 200.10^5 \ pascal = 200\,bar}$

2) Intensité de la résultante : $\boxed{\|\vec{R}\| = P_G.S = P_G.\dfrac{\pi.d^2}{4}}$

A.N. $\boxed{\|\vec{R}\| = 200.10^5.\dfrac{\pi.0,310^2}{4} = 15.10^5\,N}$

3) Moment quadratique : $\boxed{I_{(G,\vec{Y})} = \dfrac{\pi.d^4}{64}}$

A.N $\boxed{I_{(G,\vec{Y})} = \dfrac{\pi.0,310^4}{64} = 4,533.10^{-4}\,m^4}$

4) Intensité du moment : $\boxed{\|\vec{M}_G\| = \varpi.I_{(G,\vec{Y})}}$

A.N $\boxed{\|\vec{M}_G\| = 1025.9,8.4,533.10^{-'} = 4,5\,Nm}$

Exercice N°14: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 11-11-2003

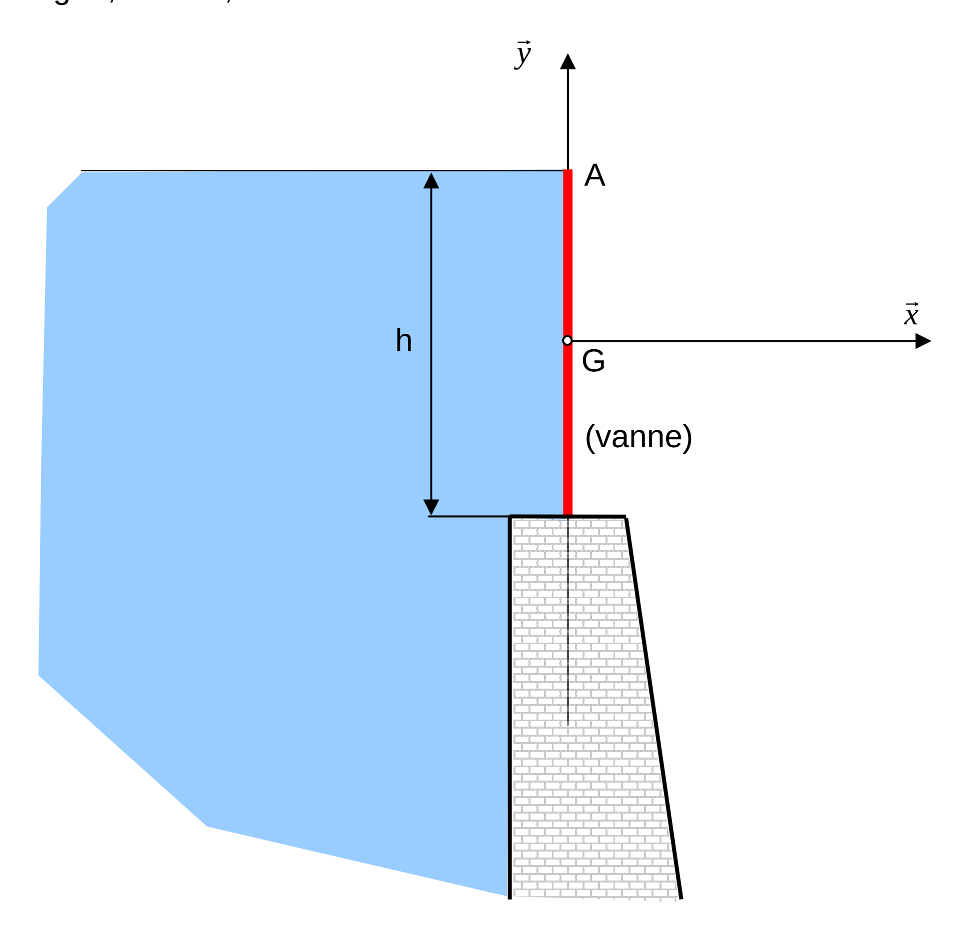
1 ENONCE

La figure ci-dessous représente une vanne de sécurité de forme rectangulaire destinée à un barrage. Elle permet d'évacuer l'eau stockée dans le barrage surtout lorsque le niveau du fluide devient élevé.

Les dimensions de la vanne sont : b=4 m et h= 2 m. Sa partie supérieure affleure la surface du plan d'eau.

Un repère (G, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) est représenté sur la figure tel que : G est le centre de surface de la vanne.

On donne : la masse volumique de l'eau ρ=1000 kg/m^3 et l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2,



Travail demandé :

1) En négligeant la pression atmosphérique, calculer la pression P_G de l'eau au centre de gravité.

2) Déterminer la résultante $\vec{R}$ des forces de pression.

3) Déterminer le moment $\vec{M}_G$ des forces de pression.

4) Calculer l'ordonnée y_0 du centre de poussée.

2 REPONSE

1) RFH entre G et A: $P_G - P_A = \rho.g.(y_A - y_G)$

Or $y_G=0$, $y_A=h/2$, $P_A=P_{atm}$ (négligée)

Donc $\boxed{P_G = \rho.g.\frac{h}{2}}$

A.N. $\boxed{P_G = 1000.9,81.1 = 9819\ Pa}$

2) $\vec{R} = P_G.S.\vec{x}$

avec $S = b.h$ donc $\boxed{\vec{R} = P_G.bh.\vec{x}}$

A.N. $\boxed{\|\vec{R}\| = 9810.4.2 = 78480\ \ N}$

3) $\vec{M}_G = \rho.g.I_{(G,\vec{z})}.\vec{z}$ Avec $I_{(G,\vec{z})} = \frac{bh^3}{12}$

Donc $\boxed{\vec{M}_G = \rho.g.\frac{bh^3}{12}.\vec{z}}$

A.N. $\boxed{\|\vec{M}_G\| = 1000.9,81.\frac{4.8}{12} = 26160\ \ N}$

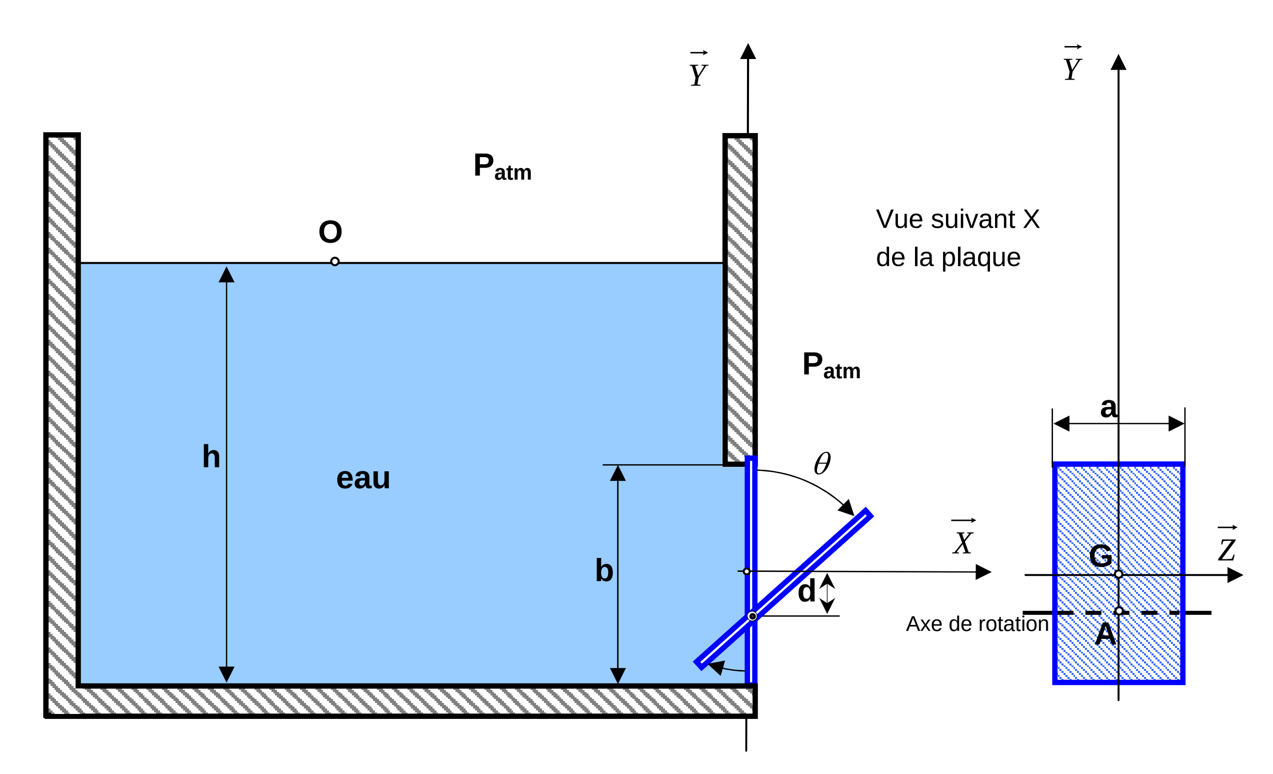
4) $\boxed{y_0 = -\frac{\|\vec{M}_G\|}{\|\vec{R}\|}}$

A.N. $\boxed{y_0 = -\frac{26160}{78480} = -0,33\ m}$

Exercice N°15: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 29-10-2002

1 ENONCE

On considère un réservoir d'eau équipé au niveau de sa base d'une plaque rectangulaire qui peut tourner d'un angle ($\theta \langle 0$) autour d'un axe (A, $\vec{Z}$).



D'un coté, la plaque est soumise aux forces de pression de l'eau et de l'autre coté, elle est soumise à la pression atmosphérique (P_{atm}). Sous l'effet des forces de pression hydrostatique variables fonction du niveau h, la plaque assure d'une façon naturelle la fermeture étanche ($\theta = 0$) ou l'ouverture ($\theta \langle 0$) du réservoir.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur h_0 du niveau d'eau à partir de laquelle le réservoir s'ouvre automatiquement.

On donne :

- le poids volumique de l'eau : $\varpi = 9{,}81.10^3 \, N/m^3$
- les dimensions de la plaque : a=0,75 m (selon l'axe $\vec{Z}$), b=1,500 (selon l'axe $\vec{Y}$)
- la distance entre le centre de surface G et l'axe de rotation (A, $\vec{Z}$) est : d=50 mm
- la pression au point O est $P_o = P_{atm}$

Travail demandé :

1) En appliquant le principe fondamental de l'hydrostatique, donner l'expression de la pression de l'eau P_G au centre de surface G en fonction de la hauteur h.

2) Déterminer les expressions de la résultante $\vec{R}$ et du moment $\overrightarrow{M_G}$ associés au torseur des forces de pression hydrostatique dans le repère $\left(G,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$.

3) En déduire l'expression du moment $\overrightarrow{M_A}$ des forces de pression de l'eau, par rapport à l'axe de rotation (A, $\vec{Z}$).

4) Donner l'expression du moment $\overrightarrow{M'_A}$ des forces de pression atmosphérique agissant sur la plaque, par rapport à l'axe de rotation (A, $\vec{Z}$).

5) A partir de quelle valeur h_0 du niveau d'eau la plaque pivote ($\theta\langle 0$) ?

2 REPONSE

1) Principe fondamental de l'hydrostatique : $P_G - P_0 = \varpi.(Y_0 - Y_G)$ or $Y_0 = h - \frac{b}{2}$;

$Y_G = 0$ et $P_0 = P_{atm}$ Donc $\boxed{P_G = P_{atm} + \varpi.\left(h - \frac{b}{2}\right)}$

2) $\vec{R} = P_G.S.\vec{X}$ avec $S = a.b$ donc $\boxed{\vec{R} = \left[P_{atm} + \varpi.\left(h - \frac{b}{2}\right)\right].a.b.\vec{X}}$

3) $\overrightarrow{M_G} = \varpi.I\left(G,\vec{z}\right)\vec{Z}$ avec $I = \frac{a.b^3}{12}$ donc $\boxed{\overrightarrow{M_G} = \varpi.\frac{ab^3}{12}.\vec{Z}}$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R}$ avec $\overrightarrow{AG} = d.\vec{Y}$ donc $\boxed{\overrightarrow{M_A} = \left[\varpi.\frac{a.b^3}{12} - d.\left(P_{atm} + \varpi.\left(h - \frac{b}{2}\right)\right).a.b\right].\vec{Z}}$

4) $\boxed{\overrightarrow{M_A'} = P_{atm}.a.b.d.\vec{Z}}$

5) La plaque pivote ($\theta < 0$) si $\left(\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{M_A'}\right)\vec{Z} < 0$ ou encore $\varpi.a.b.\left[\frac{b^2}{12} - d.\left(h - \frac{b}{2}\right)\right] < 0$

Equivaut à $h > \left(\frac{b}{2} + \frac{b^2}{d}\right)$ donc $\boxed{h_0 = b.\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{12.d}\right)}$ A.N. $\boxed{h_0 = 4{,}5\,m}$

Exercice N°16:

1 ENONCE

On considère une sphère pleine en bois de rayon r=20 cm et une sphère creuse en acier de rayon r=20 cm et d'épaisseur e=8 mm.

On suppose que le volume compris entre 0 et (r-e) est vide.

On donne :

- la masse volumique du bois : ρ_{bois} = 700 kg/m^3
- la masse volumique de l'acier : ρ_{acier} = 7800 kg/m^3
- la masse volumique de l'eau : ρ_{eau} = 1000 kg/m^3

1) Déterminer le poids d'une chaque sphère.

2) Déterminer la poussé d'Archimède qui s'exercerait sur chacune de ces sphères si elles étaient totalement immergées dans l'eau.

3) Ces sphères pourraient-elles flotter à la surface de l'eau ?

4) Si oui quelle est la fraction du volume immergé ?

2 REPONSE

1) Poids de chaque sphère: poids = ρ.g.V — $poids_{bois} = \rho_{bois}.g.(\frac{4}{3}.\pi.r^3)$ A.N.

$poids_{bois} = 700 \times 9{,}8 \times 0{,}0335 = 230\ N$ $poids_{acier} = \rho_{aciers}.g.[(\frac{4}{3}.\pi.r^3) - (\frac{4}{3}.\pi.(r-e)^3)]$

A. N. $poids_{acier} = 7800 \times 9{,}8 \times 0{,}00386 = 295\ N$

2) Poussée d'Archimède :

La poussé d'Archimède est égale au poids du volume déplacé. Or lorsqu'elles sont totalement immergées, ces deux sphères vont déplacer le même volume e volume

donc: $P_{ARCH} = \rho_{eau}.g.(\frac{4}{3}.\pi.r^3)$ A.N. $P_{ARCH} = 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}0335 = 328\ N$

3) Ces deux sphères peuvent toutes les deux flotter car leurs poids sont inférieurs à la poussé d'Archimède.

4) A l'équilibre la poussé d'Archimède est égale au poids :

5)

$230 = 1000.9{,}8.V_{bois\ immergé} \Rightarrow V_{bois\ immergé} = 0{,}0234$ m^3 soit F=70%.

$295 = 1000.9{,}8.V_{acier\ immergé} \Rightarrow V_{acier\ immergé} = 0{,}0301$ m^3 soit F=90%.

Exercice N°17: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 15-01-2007

1 ENONCE

Une sphère de rayon R=10 cm flotte à moitié (fraction du volume immergé F_1=50 %) à la surface de l'eau de mer (masse volumique ρ_{mer}=1025 kg/m^3).

1) Déterminer son poids P.

2) Quelle sera la fraction du volume immergé F_2 si cette sphère flottait à la surface de l'huile (masse volumique ρ_{huile}=800 kg/m^3) ?

2 REPONSE

1) Equation d'équilibre : $Poids = P_{ARCH} = F_1.V.\rho_{mer}.g = F_1.\frac{4}{3}\pi.R^3.\rho_{mer}.g$

A.N. $Poids = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 0{,}1^3.1025.9{,}81 = 21\ N$

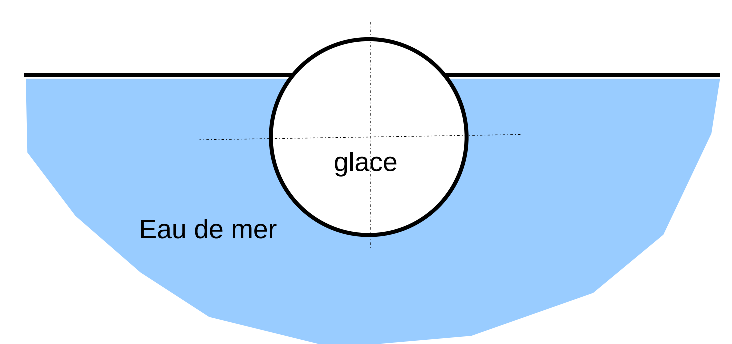
2) $Poids = P_{ARCH} \Leftrightarrow F_2.V.\rho_{huile}.g = Poids$

Équivaut à $F_2 = \frac{1}{2}\frac{\rho_{mer}}{\rho_{huile}}$ AN. $F_2 = \frac{1}{2}\frac{1025}{800} = 64\%$

Exercice N°18: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 13-12-2007

1 ENONCE

La glace à -10°C a une masse volumique ρ_{glace}= 995 kg/m^3. Un iceberg sphérique de 1000 tonnes flotte à la surface de l'eau. L'eau de mer a une masse volumique ρ_{eau} = 1025 kg/m^3.



Travail demandé :

1) Déterminer la fraction F du volume immergée ?

2) Quelle sera F si la glace avait une forme cubique ?

2 REPONSE

1) Equation d'équilibre : P_{arch}=Poids $\Rightarrow \rho_{glace}.g.V_{total} = \rho_{eau}.g.V_{immergé}$

donc $\boxed{F = \frac{V_{immergé}}{V_{total}}.100 = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau}}.100}$

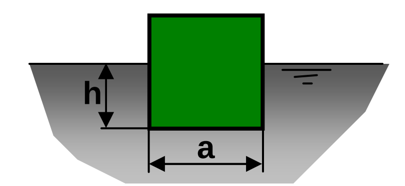
A.N. $\boxed{F = \frac{995}{1025}.100 = 97\%}$

2) La fraction F ne dépend que du rapport des masses volumiques. Elle est indépendante de la forme. Donc F=97% si la forme était cubique.

Exercice N°19: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 20-06-2005

1 ENONCE

Un cube en acier de coté a=50 cm flotte sur du mercure.



On donne les masses volumiques :

- de l'acier ρ_1= 7800 kg/m^3
- du mercure ρ_2= 13600 kg/m^3

1) Appliquer le théorème d'Archimède,

2) Déterminer la hauteur h immergée.

2 REPONSE

1) Théorème d'Archimède : la poussée d'Archimède est égal au poids du volume déplacé: $\boxed{P_{ARCH} = a^2.h.\rho_2.g}$.

2) Equation d'équilibre : $P_{ARCH} = Poids$

Donc $a^2.h.\rho_2.g = a^3.\rho_1.g$

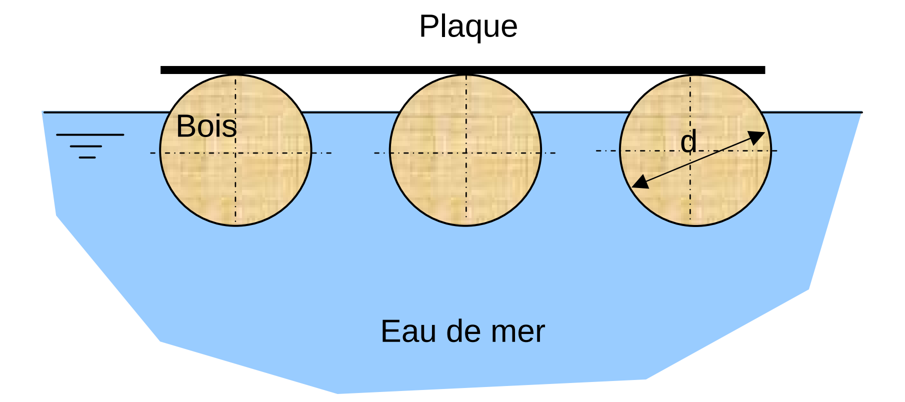
équivaut à $\boxed{h = \frac{\rho_1}{\rho_2}.a}$

A.N. $\boxed{h = \frac{7800}{13600}.50 = 28{,}676\ cm}$

Exercice N°20: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 21-04-2003

1 ENONCE

On considère une plate-forme composée d'une plaque plane et de trois poutres cylindriques en bois qui flottent à la surface de la mer.



On donne:

- les dimensions d'une poutre: diamètre d=0,5 m et longueur L=4 m,
- la masse volumique du bois : $\rho_{bois} = 700\ kg/m^3$,
- la masse volumique de l'eau de mer: $\rho_{mer} = 1027\ \ kg/m^3$,
- la masse de la plaque M_c = 350 kg,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2.

Travail demandé:

1) Calculer le poids total P_0 de la plate-forme.

2) Ecrire l'équation d'équilibre de la plate-forme.

3) En déduire la fraction F(%) du volume immergé des poutres.

4) Déterminer la masse Mc maximale qu'on peut placer sur la plate-forme sans l'immerger.

2 REPONSE

1) Poids total de la plate-forme : $P_0 = (M_p + 3.M_b).g = (M_p + 3.\rho_{bois}.\frac{\pi.d^2}{4}.L)$

A.N. $P_0 = \left(350 + 3.700.\frac{\pi.0,5^2}{4}.4\right).9,81 = 19613,49\ N$

2) Equation d'équilibre : P_0 = Poussée d'Archimède

3) P_{ARCH}= poids du volume d'eau déplacé

$$P_{ARCH} = 3.\rho_{eau}.V_{immerge}.g = P_o \Rightarrow \quad V_{immerg} = \frac{P_0}{3.\rho_{eau}.g}$$

La fraction du volume immergé : $F(\%) = \frac{V_{immerge}}{V_{poutre}}.100 = \frac{P_0}{3.\rho_{eau}.g.V_{poutre}}.100$

A.N. $F(\%) = \frac{19613,49}{3.1027.9,81.\left(\frac{\pi.0,5^2}{4}.4\right)}.100 = 82,62 \quad \%$

4) Poutre complètement immergée : F(%)=100 % c'est-à-dire $V_{immergé}=V_{poutre}$

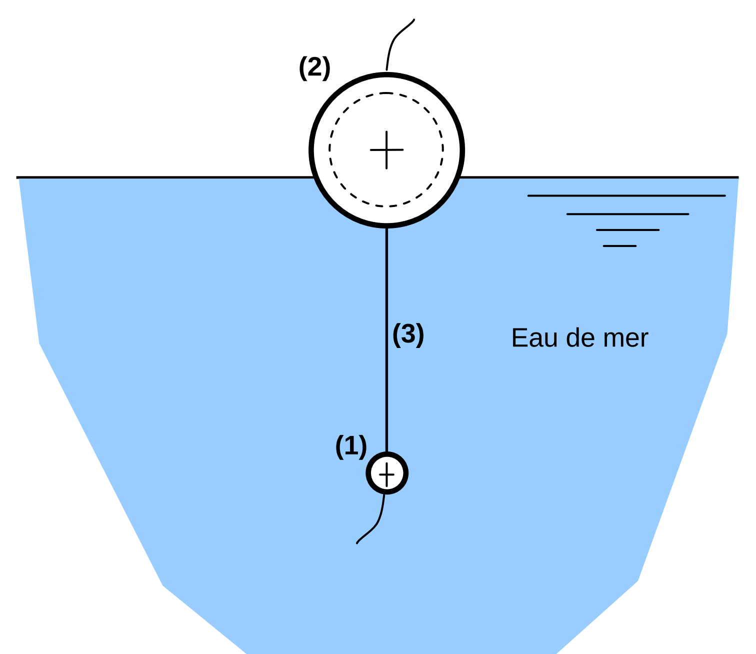
$\frac{P_0 + M_C.g}{3.\rho_{eau}.g} = V_{poutre}$. On obtient : $M_c = \frac{1}{g}.\left(3.\rho_{eau}\,g.V_{poutre} - P_o\right)$

A.N. $M_c = \frac{1}{9,81}.\left(3.1027.9,81.\frac{\pi.0,5^2}{4}.4 - 19613,49\right) = 420,47 \quad kg$

Exercice N°21: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 31-05-2004

1 ENONCE

La figure ci-dessous représente un montage destiné pour la pêche à la ligne.



Il est composé d'une sphère pleine (1) de rayon R_1 =10 mm en plomb suspendu, par l'intermédiaire d'un fil souple et léger (3), à un flotteur (2) en forme de sphère creuse en matière plastique de rayon R_2=35 mm et d'épaisseur e=5 mm.

On donne :

- la masse volumique de l'eau de mer : ρ=1027 kg/m^3,

- la masse volumique du plomb : ρ_1 =11340 kg/m^3 ,
- la masse volumique du matériau du flotteur : ρ_2 =500 kg/m^3,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81m.s^{-2}.

Travail demandé:

1) Calculer le poids P_1 de la sphère (1).

2) Déterminer la poussée d'Archimède P_{ARCH1} qui agit sur la sphère (1).

3) Ecrire l'équation d'équilibre de la sphère (1). En déduire la tension T du fil.

4) Calculer le poids P_2 du flotteur (2).

5) Ecrire l'équation d'équilibre du flotteur. En déduire la poussée d'Archimède P_{ARCH2} agissant sur la sphère (2).

6) En déduire la fraction F% du volume immergé du flotteur.

2 REPONSE

1) Poids de la sphère (1) : $P_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3.\rho_1.g$ A.N. $P_1 = \frac{4}{3}\pi.0,01^3.11340.9,81 = 0,4659 N$

2) Poussée d'Archimède sur la sphère (1) : $P_{ARCH1} = \frac{4}{3}\pi R_1^3.\rho.g$

A.N. $P_{ARCH1} = \frac{4}{3}\pi.0,01^3.1027.9,81 = 0,0422 N$

3) Equation d'équilibre : $\vec{T} + \vec{P_1} + \vec{P}_{ARCH} = \vec{O}$

Tension du fil : $T = P_1 - P_{ARCH1}$ A.N. $T = 0,4659 - 0,0422 = 0,4237$ N

4) Poids du flotteur (2) : $P_2 = \frac{4}{3}\pi\left[R_2^3 - (R_2 - e)^3\right]\rho_2.g$

A.N. $P_2 = \frac{4}{3}\pi.\left[0,035^3 - 0,030^3\right].500.9,81 = 0,3262 N$

5) Equation d'équilibre du flotteur (2) : $\vec{T} + \vec{P_2} + \vec{P}_{ARCH2} = \vec{O}$

Poussée d'Archimède agissant sur la sphère (2) : $P_{ARCH2} = P_2 + T$

A.N. $P_{ARCH2} = 0,3262 + 0,4237 = 0,7499$ N

6) Fraction du volume immergé : $F = \frac{V_{im}}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}.100 = \frac{\frac{P_{ARCH2}}{\rho g}}{\frac{4}{3}\pi.R_2^3}.100$

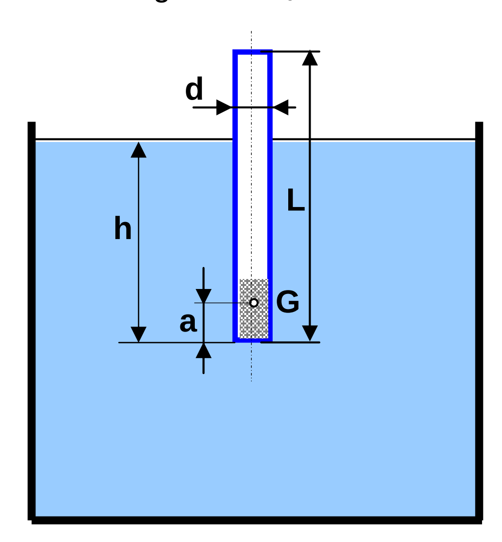
A.N. $F = \dfrac{\dfrac{P_{ARCH\,2}}{\rho g}}{\dfrac{4}{3}\pi .0{,}035^3}.100 = 41{,}4449\ \%$

Exercice N°22: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 29-10-2002

1 ENONCE

On considère un densimètre formé d'un cylindrique creux de longueur L=400 mm et de diamètre d, dans lequel est placée une masse de plomb au niveau de sa partie inférieure. Le centre de gravité G du densimètre est situé à une distance a =10 mm par rapport au fond. Le densimètre flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ inconnu. Il est immergé jusqu'à une hauteur h.

Lorsque le densimètre est placé dans de l'eau de masse volumique $\rho_0 = 1000\ kg/m^3$, la hauteur immergée est h_0 = 200 mm.



Travail demandé :

1) Quel est la masse volumique ρ du liquide si la hauteur immergée h=250 mm?

2) Quel est la masse volumique ρ_{min} qu'on peut mesurer avec ce densimètre ?

3) Jusqu'à quelle valeur de la masse volumique ρ du liquide le densimètre reste dans une position d'équilibre verticale stable?

4) Donner un exemple de liquide dans lequel on risque d'avoir un problème de stabilité.

2 REPONSE

1) Le densimètre est soumis à son poids propre d'intensité m.g et à la poussée d'Archimède dirigée vers le haut et d'intensité $\rho.g.V_{liquide\ deplace} = \rho.g.\frac{\pi.d^2}{4}.h$.

L'équation d'équilibre est : $m.g = \rho.g.\frac{\pi.d^2}{4}.h$ équivalente à $m = \rho.\frac{\pi.d^2}{4}.h$ (1)

De même si le liquide était de l'eau on a : $m = \rho_0.\frac{\pi.d^2}{4}.h_0$ (2)

(1) et (2) entraîne $\rho.h = \rho_0.h_0$ donc $\boxed{\rho = \frac{h_0}{h}.\rho_0}$ A.N. $\boxed{\rho = 800\ kg/m^3}$

2) La masse volumique ρ_{min} correspond à une hauteur immergée h=400 mm.

$$\boxed{\rho_{min} = \frac{h_0}{h}.\rho_0}$$

A.N. $\boxed{\rho = 500\ kg/m^3}$

3) Le densimètre reste en position d'équilibre stable si le centre de gravité du liquide déplacé (situé à une distance h/2 de la base) est au dessus du centre de gravité (situé à une distance a de la base).

Donc, il faut que $\frac{h}{2} > a$

pour assurer la stabilité du densimètre.

Or $h = \frac{\rho_0}{\rho}.h_0$ donc il faut que $\boxed{\rho < \frac{1}{2}.\left(\frac{h_0}{a}\right).\rho_0}$

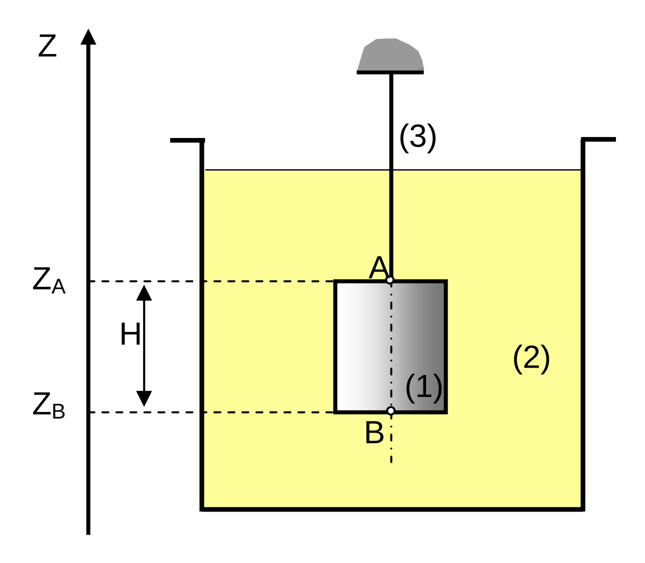
A.N. $\boxed{\rho < 10000\ \ kg/m^3}$

4) Le mercure a une masse volumique $\boxed{\rho = 13600\ \ kg/m^3 > 10000}$

Exercice N°23: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 11-11-2003

1 ENONCE

On considère un cylindre (1) en acier, de rayon R et de hauteur H. Ce cylindre est suspendu par un fil (3) à l'intérieur d'un récipient contenant de l'huile (2).



On donne :

- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2,
- la masse volumique de l'huile ρ_{huile}=824 kg/m^3,
- la masse volumique de l'acier ρ_{acier}=7800 kg/m^3,

Travail demandé :

1) Déterminer l'expression de la tension T du fil en appliquant le théorème d'Archimède.

2) Retrouver la même expression en utilisant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique).

3) Faire une application numérique pour R=0,1 m et H=0,2 m.

2 REPONSE

1) Equation d'équilibre : $\vec{T}+\vec{P}+\vec{P}_{ARCH}=\vec{0}$

$\vec{T}$: tension du fil ; $\vec{P}$: poids du cylindre et $\vec{P}_{ARCH}$:poussée d'Archimède.

Projection selon $\vec{Z}$: $T-mg+P_{ARCH}=0$ (m : masse du cylindre : $m=\rho_{acier}.\pi.R^2.H$)

Th. d'Archimède : $P_{ARCH}=\rho_{huile}.\pi.R^2.H$ donc $\boxed{T=(\rho_{acier}-\rho_{huile}).\pi.R^2.H.g}$

2) Equation d'équilibre : $\vec{T}+\vec{P}+\vec{F}_A+\vec{F}_B+\Sigma\vec{F}_L=\vec{0}$

$\vec{T}$: tension du fil, $\vec{P}$: poids du cylindre , $\vec{F}_A$: force de pression agissant sur la surface supérieure, $\vec{F}_B$: force de pression agissant sur la surface inférieure, $\Sigma\vec{F}_L$: forces de pression agissant sur la surface latérale (perpendiculaire à l'axe $\vec{Z}$).

Projection selon $\vec{Z}$: $T - mg - P_A.S + P_B.S = 0$

Où m : masse du cylindre ; P_A , P_B :pressions respectivement au point A et au point B et S : section.

RFH : $P_B - P_A = \rho_{huile}.g.H$ donc $\boxed{T = (\rho_{acier} - \rho_{huile}).\pi.R^2.H.g}$

3) $\boxed{T = (7800 - 824).\pi.0,1^2.0,2.9,81 = 429,5\ N}$

Chapitre 3 : DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides ***en mouvement***. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse),

- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,

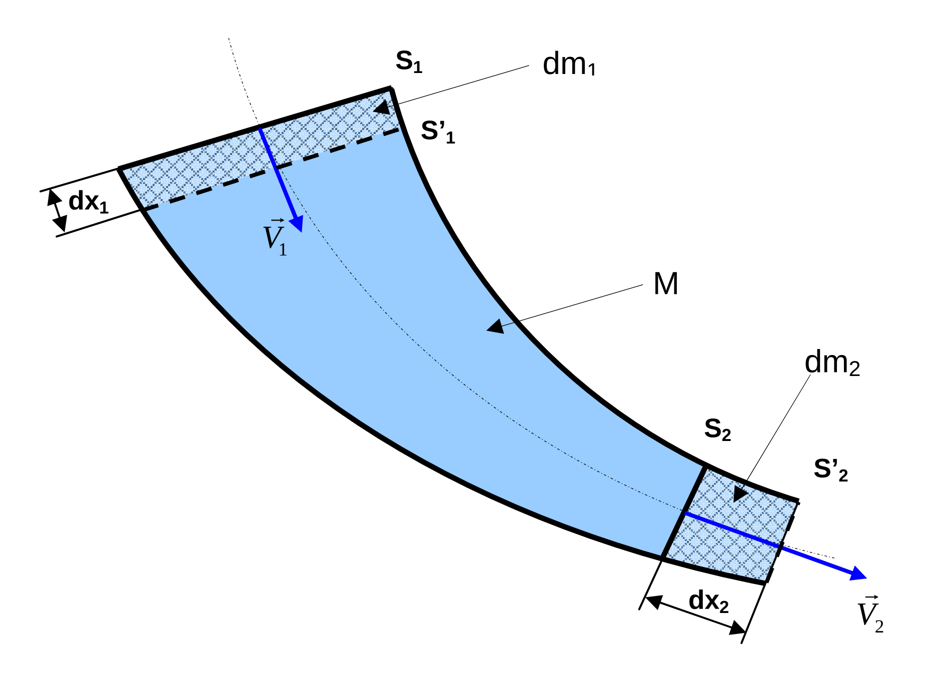
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

2 ECOULEMENT PERMANENT

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace. L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

3 EQUATION DE CONTINUITE

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t,
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t'=(t+dt),
- $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+ M)

A l'instant t+dt : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à (M+ dm_2).

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$dm_1 = dm_2$ Donc $\rho_1.dV_1 = \rho_2.dV_2$ ou encore $\rho_1.S_1.dx_1 = \rho_2.S_2.dx_2$,

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho_2.S_2.\frac{dx_2}{dt} \quad \Leftrightarrow \rho_1.S_1.V_1 = \rho_2.S_2.V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1.V_1 = S_2.V_2} \quad (1)$$

4 NOTION DE DEBIT

4.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$\boxed{q_m = \frac{dm}{dt}}$$

où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s)

en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho.S_2.\frac{dx_2}{dt} \quad (2)$$

avec :

$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1,

$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2

D'après (2) :

$q_m = \rho.S_1.V_1 = \rho.S_2.V_2$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$\boxed{q_m = \rho.S.V}$ (3)

où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m^3)

S : Section de la veine fluide en (m^2)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

4.2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt}}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dV : Volume élémentaire, en (m^3), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,
- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation (3) et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$ on peut écrire également que

$q_v = \frac{q_m}{\rho}$ soit

$\boxed{q_v = S.V}$

4.3 Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$\boxed{q_m = \rho.q_v}$

5 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT SANS ECHANGE DE TRAVAIL

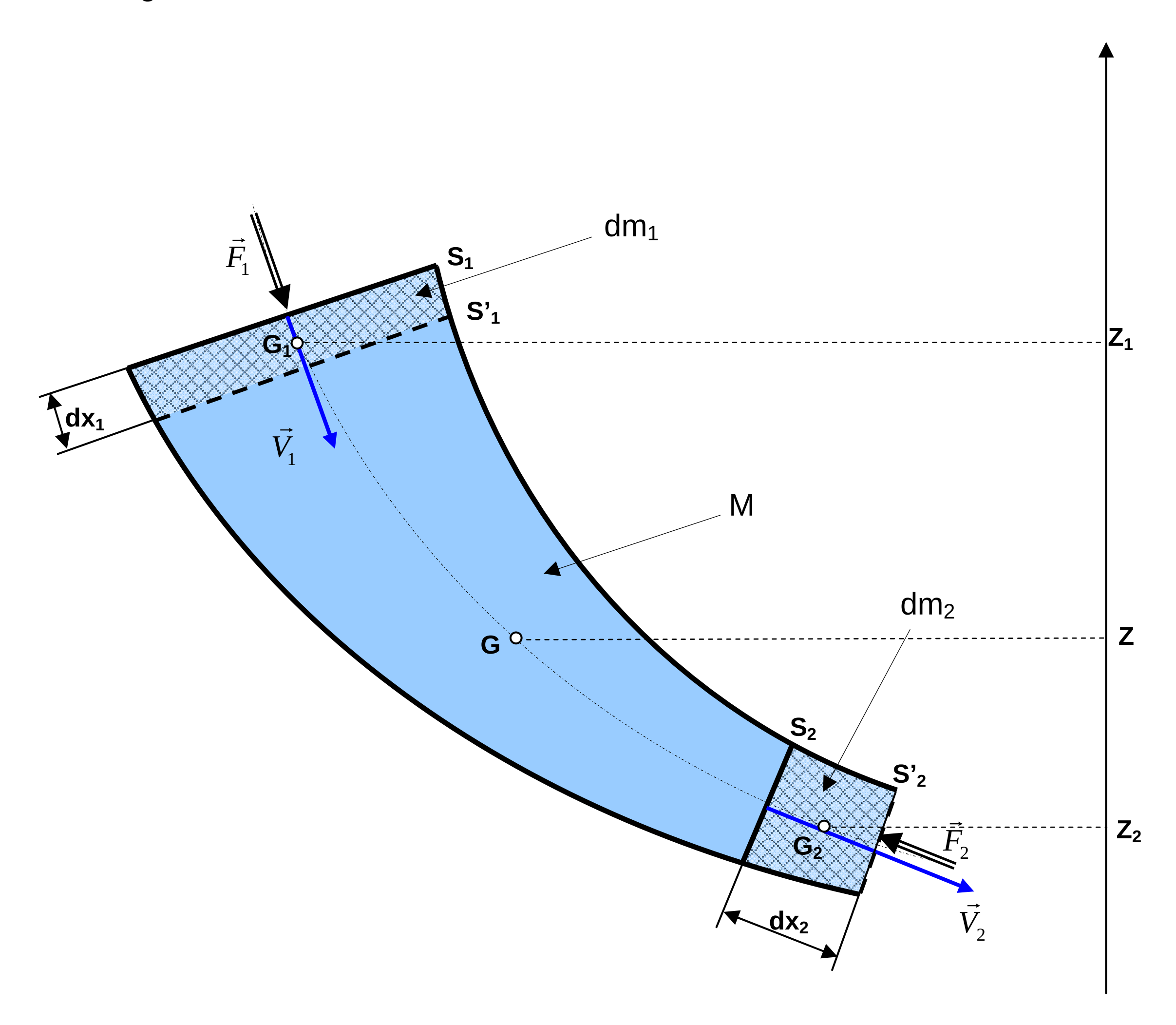
Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe $\vec{Z}$ vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1, Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1, dm_2 et M.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.



A l'instant t le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2}$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm_2) est compris entre S'$_1$ et S'$_2$. Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces\ \ de\ \ pression} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 \Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 = P_1.dV_1 - P_2.dV_2$$

en simplifiant on obtient : $dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0} \quad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg)

D'après la relation (4) on peut alors écrire :

$$\boxed{\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g.z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g.z_1}$$

6 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT AVEC ECHANGE DE TRAVAIL

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2. Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η.Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$$

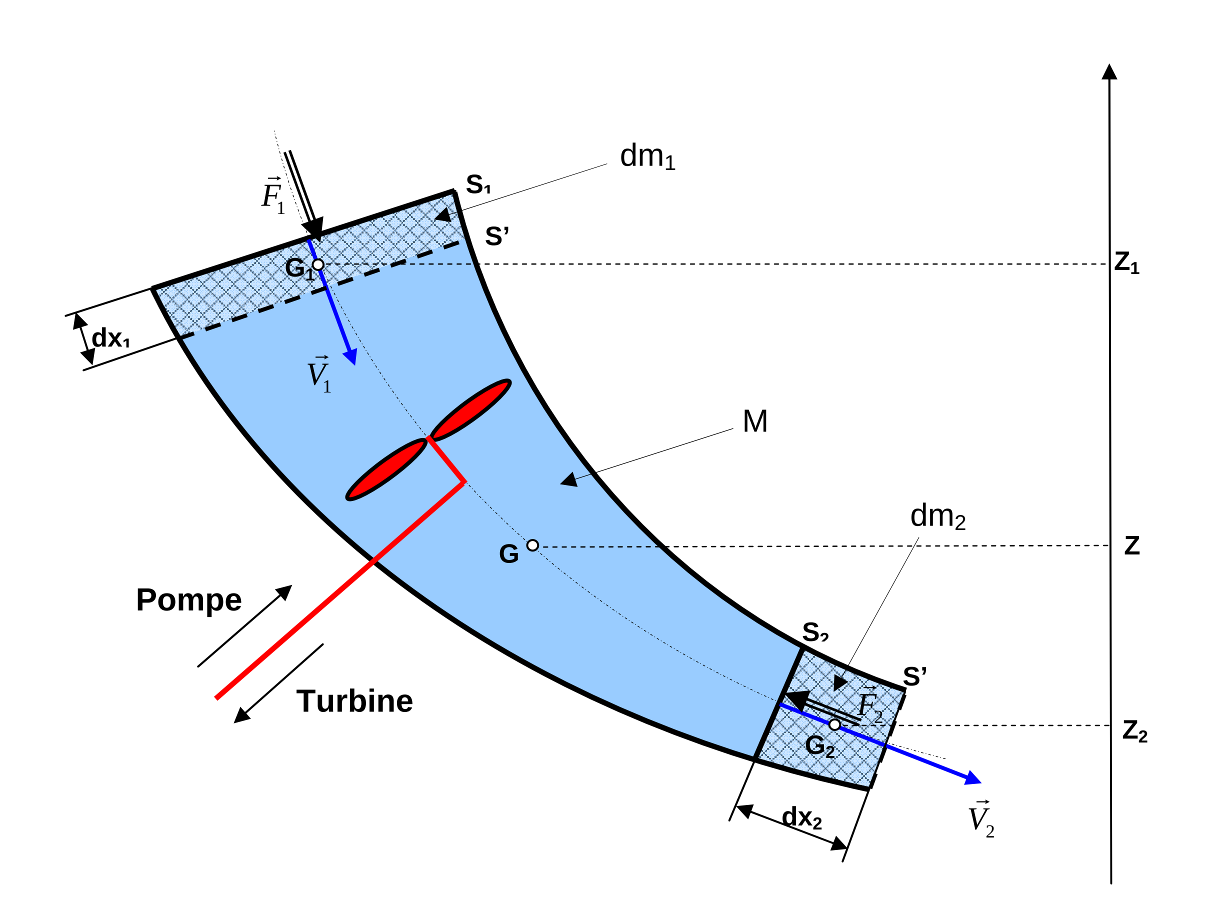
- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$$

Entre les instant t et t'=(t+dt), le fluide a échange un travail net $W_{net} = P_{net}.dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.

A l'instant t le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2}$



A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm_2) est compris entre S'$_1$ et S'$_2$. Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »,en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$E'_{mec} - E_{mec} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 + P_{net}.dt$

$E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 + P_{net.}.dt = P_1.dV_1 - P_2.dV_2 + P_{net}.dt$ en simplifiant on aura :

$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2 + P_{net}.dt$ Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, on aboutie à l'équation de Bernoulli : $\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}}$ (5)

7 THEOREME D'EULER :

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$\sum \vec{F}ext = \frac{d\vec{P}}{dt}$; avec $\vec{P} = m\vec{V}_G$: quantité de mouvement.

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

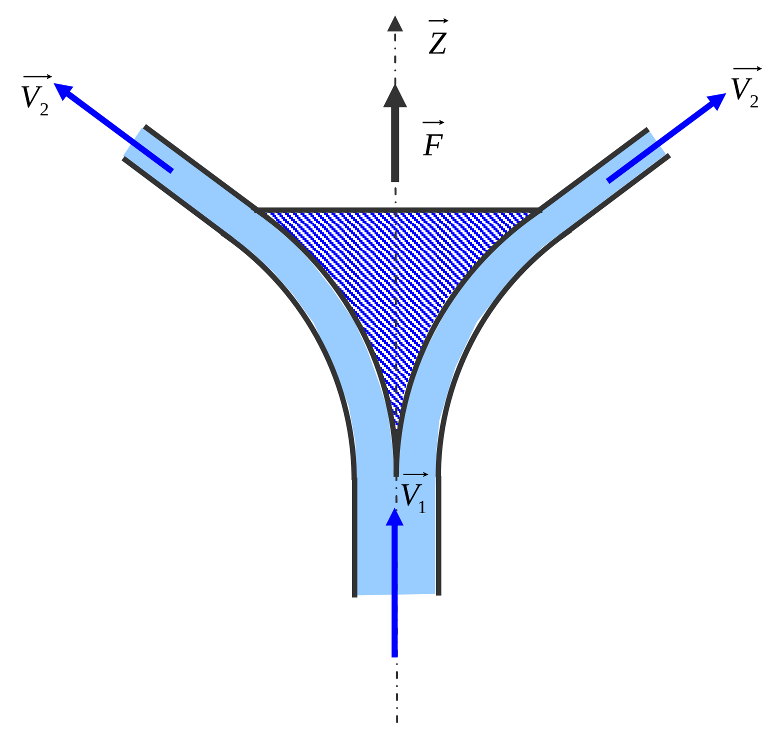
Enoncé

La résultante ($\sum \vec{F}ext$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse $\vec{V_1}$ et sort par S_2 à une vitesse $\vec{V_2}$.

$$\boxed{\sum \vec{F}ext = q_m(\vec{V_2} - \vec{V_1})}$$

Exemple :

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe $\vec{Z}$. Le jet d'un écoulement de débit massique q_m, de vitesse $\vec{V_1}$ et de direction parallèle à l'axe $\vec{Z}$, percute l'obstacle qui le dévie d'un angle β. Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse $\vec{V_2}$ de direction faisant un angle β par rapport à l'axe $\vec{Z}$.



La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est : $q_m.V_1$ porté par l'axe $\vec{Z}$.

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est : $q_m.V_1.\cos\beta$ porté par l'axe $\vec{Z}$.

La force opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = q_m.V_2.\cos\beta - q_m.V_1$$

La force F exercée sur l'obstacle en direction de $\vec{Z}$ est égale et opposée à celle-ci :

$$\boxed{F = q_m.(V_1 - V_2.\cos\beta)}$$

8 CONCLUSION

Les lois et les équations établies dans ce chapitre en particulier l'équation de Bernoulli ont un intérêt pratique considérable du moment ou elles permettent de comprendre le principe de fonctionnement de beaucoup d'instruments de mesure de débits tels que le tube de Pitot, le tube de Venturi et le diaphragme…etc.

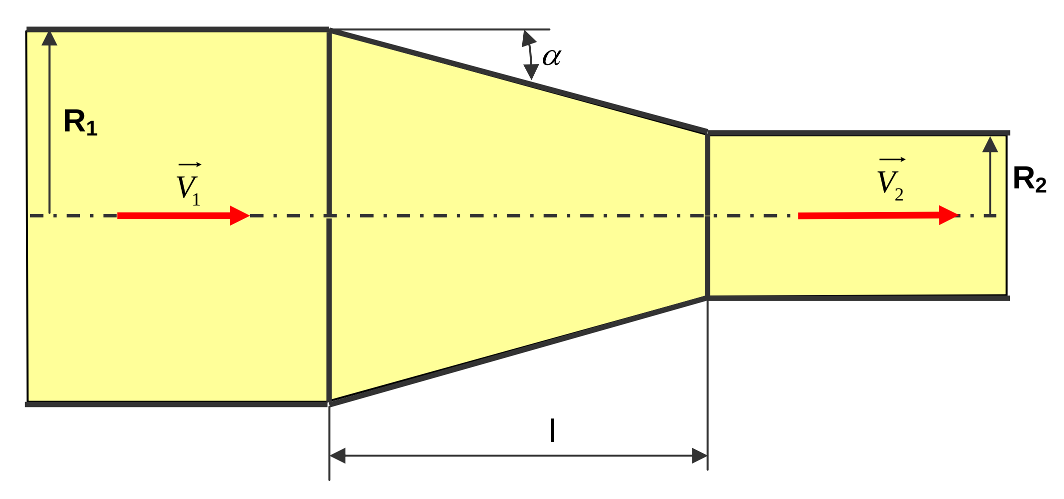
Réservées aux fluides incompressibles, ces lois et équations peuvent être employées dans certains cas particulier pour les fluides compressibles à faible variation de pression. Une telle variation existe dans plusieurs cas pratiques. Cependant, lorsqu'on veut prendre en considération la compressibilité dans les calculs, il est nécessaire d'employer les formules appropriées.

9 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice N°1:

1 ENONCE

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α (schéma ci-dessus).



1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

2) Calculer (R_1 - R_2) en fonction de L et α. En déduire la longueur L. (R_1 = 50 mm, α = 15°).

2 REPONSE

1) On applique l'équation de continuité :

$V_1.S_1 = V_2.S_2$ ou encore $\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1}$ or $S_1 = \pi.R_1^2$ et $S_2 = \pi.R_2^2$ d'où $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2}$

2) $tg\alpha = \frac{R_1 - R_2}{l}$ donc $\boxed{l = \frac{R_1 - R_2}{tg\alpha}}$ or $R_2 = \frac{R_1}{2}$ donc $l = \frac{R_1}{2.tg\alpha}$ A.N.: $\boxed{L = 93{,}3 \text{ mm}}$.

Exercice N°2: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 23-05-2003

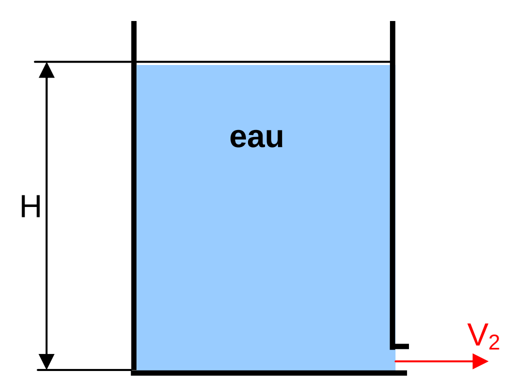
1 ENONCE

On considère un réservoir remplie d'eau à une hauteur **H= 3 m** , muni d'un petit orifice à sa base de diamètre **d= 10 mm**.

1) En précisant les hypotèses prises en comptes, appliquer le théorème de Bernouilli pour calculer la vitesse V_2 d'écoulement d'eau.

2) En déduire le débit volumique Q_v en (l/s) en sortie de l'orifice.

On suppose que g=9,81 m/s.



2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement V_2 ?

On applique le théorème de Bernoulli avec les hypothèses suivantes : $V_1 \approx 0$ car le niveau dans le réservoir varie lentement et $P_1 = P_2 = P_{atm}$,

$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g.(Z_2 - Z_1) = 0$ On obtient :

$\boxed{V_2 = \sqrt{2.g.H}}$ A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{2.9{,}81.3} = 7{,}67\ m/s}$

2) Débit volumique Q_v ?

$\boxed{Q_V = V_2.S}$ or $S = \frac{\pi.d^2}{4} = \frac{\pi.(10.10^{-3})^2}{4} = 7{,}87.10^{-2}\ m^2$ A.N. $\boxed{Q_V = O{,}6\ L/s}$

Exercice N°3: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 11-11-2003

1 ENONCE

Un fluide parfait incompressible s'écoule d'un orifice circulaire situé sur le coté d'un réservoir avec un débit volumique q_v=0,4 L/s. Le diamètre de l'orifice est d=10 mm.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice.

2) Enoncer le théorème de Bernoulli.

3) A quelle distance de la surface libre se trouve l'orifice ?

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{q_v}{S} = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.0,4.10^{-3}}{\pi.0,01^2} = 5,1\ m/s$

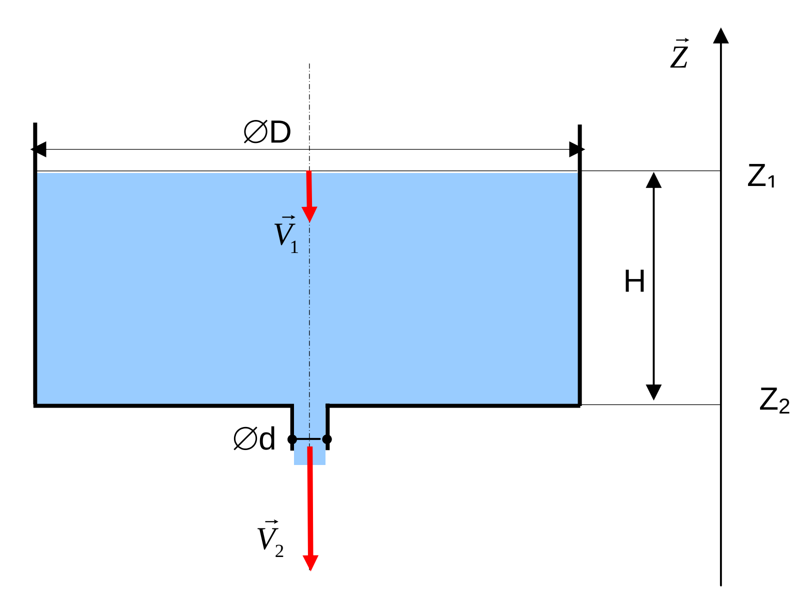
2) Théorème de Bernoulli : $\frac{V_1^2}{2.g} + Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} = \frac{V_2^2}{2.g} + Z_2 + \frac{P_2}{\varpi}$

3) On a Z_1-Z_2=h ; P_1=P_2=P_{atm} ; V_1=0 donc $h = \frac{V_2^2}{2.g}$ A.N. $h = \frac{5,1^2}{2.9,81} = 1,32\ m$

Exercice N°4: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 23-05-2005

1 ENONCE

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur D = 2 m rempli d'eau jusqu'à une hauteur H = 3 m. Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre d = 10 mm permettant de faire évacuer l'eau.



Si on laisse passer un temps très petit dt, le niveau d'eau H du réservoir descend d'une quantité dH. On note $V_1 = \frac{dH}{dt}$ la vitesse de descente du niveau d'eau, et V_2 la vitesse d'écoulement dans l'orifice. On donne l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s^2.

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de V_1 en fonction de V_2, D et d.

2) Ecrire l'équation de Bernoulli. On suppose que le fluide est parfait et incompressible.

3) A partir des réponses aux questions 1) et 2) établir l'expression de la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de g, H, D et d.

4) Calculer la vitesse V_2. On suppose que le diamètre d est négligeable devant D. C'est-à-dire $\frac{d}{D} << 1$.

5) En déduire le débit volumique q_V.

2 REPONSE

1) Equation de continuité : $\boxed{\frac{\pi.D^2}{4}.V_1 = \frac{\pi.d^2}{4}.V_2}$ donc la vitesse $\boxed{V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2.V_2}$ (1)

2) Equation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g.(Z_2 - Z_1) = 0$

Or P_1=P_2= P_{atm} donc : $\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - g.H = 0}$ (2)

3) On substitue l'équation (1) dans (2) on obtient : $\frac{V_2^2 - \left(\frac{d}{D}\right)^4.V_2^2}{2} = g.H$

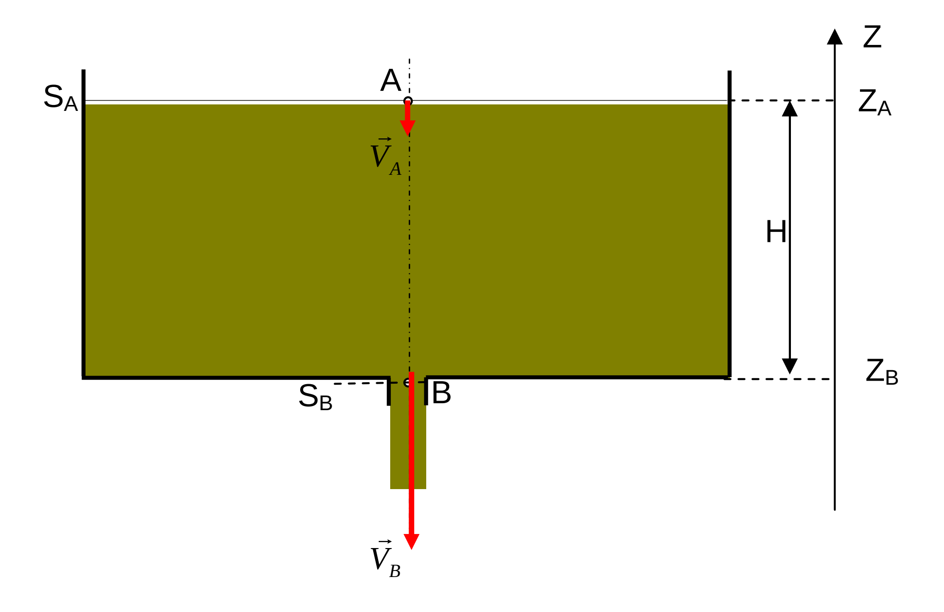
Donc la vitesse : $\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2.g.H}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}}$

4) Si $\left(\frac{d}{D}\right) << 1$ alors $\boxed{V_2 = \sqrt{2.g.H}}$ A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{2.9,81.3} = 7,67\ m/s}$

5) $q_v = \frac{\pi.d^2}{4}.V_2$ A.N. $q_V = \frac{\pi.0,01^2}{4}.7,67 = 6.10^{-4}\ m^3/s$

Exercice N°5: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 30-04-2007

1 ENONCE



Le réservoir cylindrique représenté ci-dessus, ouvert à l'air libre, a une section S_A de diamètre D_A = 2 m. Il est muni, à sa base, d'un orifice de vidage de section S_B et de diamètre D_B = 14 mm. Le réservoir est plein jusqu'à une hauteur $H=(Z_A - Z_B)$= 2,5 m de fioul, liquide considéré comme fluide parfait, de masse volumique ρ= 817 kg/m^3.

On donne

- la pression atmosphérique P_{atm}= 1 bar.
- l'accélération de la pesanteur g=9,8 m/s^2.

On note $\alpha=(S_B/S_A)$

Partie 1 : L'orifice est fermé par un bouchon.

1) En appliquant la RFH, déterminer la pression P_B au point B.

2) En déduire la valeur de la force de pression F_B qui s'exerce sur le bouchon.

Partie 2 : L'orifice est ouvert.

On procède à la vidange du réservoir.

Le fioul s'écoule du réservoir. Sa vitesse moyenne d'écoulement au point A est notée V_A, et sa vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice est notée V_B.

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire V_A en fonction de V_B et α.

2) En appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B, établir l'expression littérale de la vitesse V_B en fonction de g, H et α.

3) Calculer la valeur de α. L'hypothèse de considérer un niveau H du fluide varie lentement est elle vraie ? Justifier votre réponse.

4) Calculer V_B en considérant l'hypothèse que α<<1.

5) Déterminer le débit volumique Q_V du fluide qui s'écoule à travers l'orifice. (en litre par seconde)

6) Quelle serait la durée T du vidage si ce débit restait constant ?

2 REPONSE

Partie 1

1) $P_B = P_A + \rho.g.H$ A.N. $P_B = 10^5 + 817.9,8.2,5 = 1,2.10^5\ pascal$

2) $F_B = P_B.S_B = P_B.\dfrac{\pi D_B^2}{4}$ A.N. $F_B = 1,2.10^5.\dfrac{\pi.(14.10^{-3})^2}{4} = 18,472\ N$

Partie 2

1) Equation de continuité $S_A.V_A = S_B.V_B$ ⇨ $V_A = \alpha.V_B$

2) Equation de Bernoulli : $\dfrac{V_B^2 - V_A^2}{2} + \dfrac{P_B - P_A}{\rho} + g(Z_B - Z_A) = 0$

or $P_A=P_B=P_{atm}$, $(Z_B-Z_A)=H$, $V_A=\alpha V_B$ donc $V_B = \sqrt{\dfrac{2.g.H}{1-\alpha^2}}$

3) $\alpha = \dfrac{S_B}{S_A} = \left(\dfrac{D_B}{D_A}\right)^2$ A.N $\alpha = \left(\dfrac{14.10^{-3}}{2}\right)^2 = 4,9.10^{-5}$

L'hypothèse de considérer un niveau quasi-contant est vraie car α<<1 donc $V_A \approx 0$

4) $V_B = \sqrt{2.g.H}$ A.N $V_B = \sqrt{2.9,8.2,5} = 7\ m/s$

5) $Q_v = S_B.V_B = \dfrac{\pi.D_B^2}{4}.V_B$ A.N $Q_v = \dfrac{\pi.(14.10^{-3})^2}{4}.7 = 1.10^{-3}\ m^3/s = 1\ L/s$

6) $T = \dfrac{V}{Q_v} = \dfrac{\pi D_A^2.H}{4.Q_v}$ A.N $Q_v = \dfrac{\pi.2^2}{4.10^3}.2,5 = 7854\ s = 130\ mn = 2\ h\ 10\ mn$

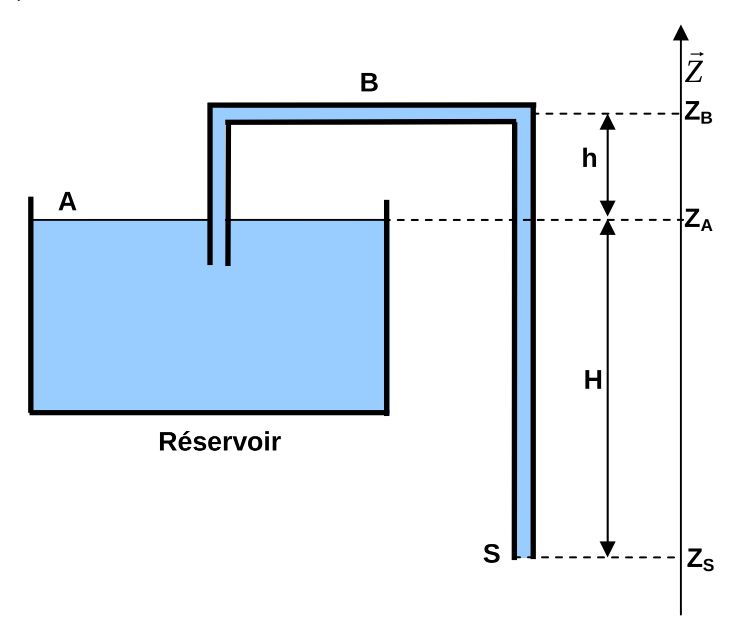
Exercice N°6: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 31-05-2004

1 ENONCE

On considère un siphon de diamètre d=10 mm alimenté par un réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport à d et ouvert à l'atmosphère.

On suppose que :

- le fluide est parfait.
- le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement.
- l'accélération de la pesanteur g=9.81 $m.s^{-2}$.
- le poids volumique de l'essence: $\varpi = 6896 \quad N/m3$.
- $H=Z_A-Z_S=2{,}5$ m.



1) En appliquant le Théorème de Bernoulli entre les points A et S, calculer la vitesse d'écoulement V_S dans le siphon.

2) En déduire le débit volumique q_V.

3) Donner l'expression de la pression P_B au point B en fonction de h, H, ϖ et P_{atm}. Faire une application numérique pour h=0.4 m.

4) h peut elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier votre réponse.

2 REPONSE

1) $\frac{V_S^2}{2g}+\frac{P_S}{\varpi}+Z_S=\frac{V_A^2}{2g}+\frac{P_A}{\varpi}+Z_A$ ona : $P_S=P_A = P_{atm}$, $V_A=0$ et $Z_A-Z_S=H$

$V_S=\sqrt{2gH}$ A.N. $V_S=\sqrt{2.9,81.2,5}=7\ m/s$

2) Le débit volumique : $q_v = V_S.\frac{\pi.d^2}{4}$ A.N. $q_V=7.\frac{\pi.0,01^2}{4}=5,5.10^{-4}\ m^3/s=0,55\ l/s$

3) Théorème de Bernoulli entre B et S : $\frac{V_B^2}{2g}+\frac{P_B}{\varpi}+Z_B=\frac{V_S^2}{2g}+\frac{P_S}{\varpi}+Z_S$

Or $V_S=V_B$, $Z_B-Z_S=H+h$ et $P_S=P_{atm}$

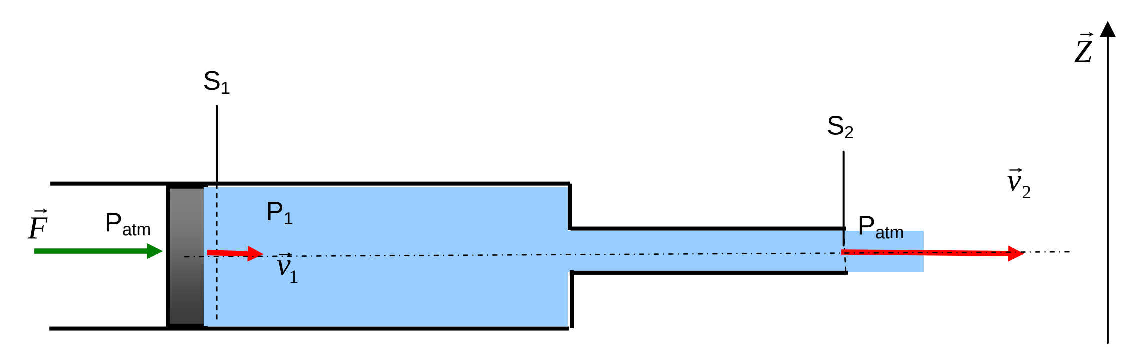
$P_B=P_{atm}-\varpi.(H+h)$ A.N. $P_B=10^5-6896.(2,5+0,4)=80001,6\ Pa=0,8\ bar$

4) Non. Il faut que $P_B>0$ Equivaut à $h<\frac{P_{atm}}{\varpi}-H$ A.N . $h<\frac{10^5}{9,81.700}-2,5=12\ m$

Exercice N°7: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 18-06-2007

1 ENONCE

La figure ci-dessous représente un piston qui se déplace sans frottement dans un cylindre de section S_1 et de diamètre d_1=4 cm remplit d'un fluide parfait de masse volumique ρ=1000 kg/m^3. Le piston est poussé par une force $\vec{F}$ d'intensité 62,84 Newtons à une vitesse $\vec{V_1}$ constante. Le fluide peut s'échapper vers l'extérieur par un cylindre de section S_2 et de diamètre d_2 = 1 cm à une vitesse $\vec{V_2}$ et une pression P_2= P_{atm} =1 bar.



Travail demandé:

1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au piston, déterminer la pression P_1 du fluide au niveau de la section S_1 en fonction de F, P_{atm} et d_1.

2) Ecrire l'équation de continuité et déterminer l'expression de la vitesse V_1 en fonction de V_2.

3) En appliquant l'équation de Bernoulli, déterminer la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de P_1, P_{atm} et ρ.

(On suppose que les cylindres sont dans une position horizontale ($Z_1=Z_2$))

4) *En déduire le débit volumique Q_v.*

2 REPONSE

1) PFD: $F + P_{atm}.S_1 = P_1.S_1 \Rightarrow \boxed{P_1 = \dfrac{4.F}{\pi.d_1^2} + P_{atm}}$

A.N. $\boxed{P_1 = \dfrac{4.-62{,}84}{\pi.0{,}04^2} + 10^5 = 1{,}5\,bar}$

2) Equation de continuité: $V_1S_1 = V_2.S_2$

$$\Rightarrow V_1 = V_2.\frac{S_2}{S_1} = V_2.\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \Rightarrow V_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2.V_2 \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{1}{16}.V_2}$$

3) Equation de Bernoulli : $\dfrac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \dfrac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0$ or $Z_1=Z_2$ et $P_2=P_{atm}$

et $V_1 = \dfrac{1}{16}.V_2$ donc $\boxed{V_2 = \sqrt{\dfrac{512}{255}.\dfrac{(P_1 - P_{atm})}{\rho}}}$

A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{\dfrac{512}{255}.\dfrac{(1{,}5.10^5 - 10^5)}{1000}} = 10\,m/s}$

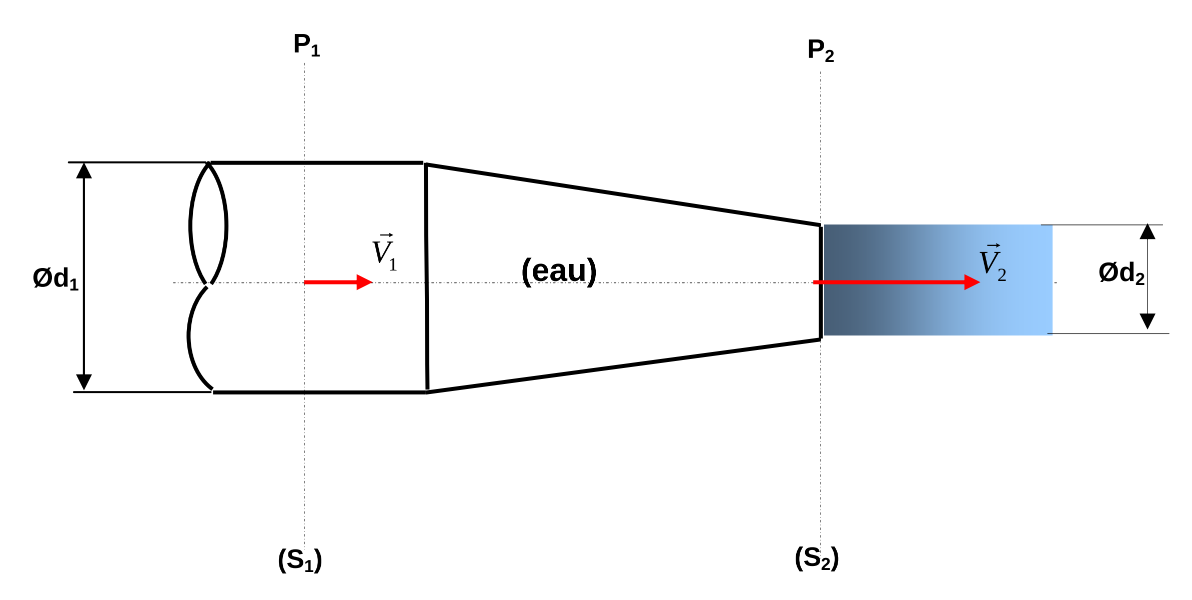
4) $\boxed{Q_v = \dfrac{\pi.d_2^2}{4}.V_2}$

A.N. $\boxed{Q_v = \dfrac{\pi.0{,}01^2}{4}.10 = 0{,}785.10^{-3}\ m^3/s}$

Exercice N°8: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 17-01-2005

1 ENONCE

La figure suivante représente une buse connectée à un tuyau dans lequel est acheminée de l'eau à une pression P_1=2,875 bar.



Le fluide subit un étranglement : sa section S_1 de diamètre d_1=20 mm est réduite à une section de sortie S_2 de diamètre d_2=10 mm.

On suppose que le fluide est parfait et la buse est dans une position horizontale.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho = 1000 \quad kg/m^3$ et la pression de sortie $P_2=P_{atm}$=1 bar.

1) Déterminer le rapport $\frac{V_2}{V_1}$.

2) En appliquant l'équation de Bernoulli, calculer la vitesse d'écoulement V_2.

2 REPONSE

1) Equation de continuité : $V_1.S_1 = V_2.S_2$ donc $\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4}$

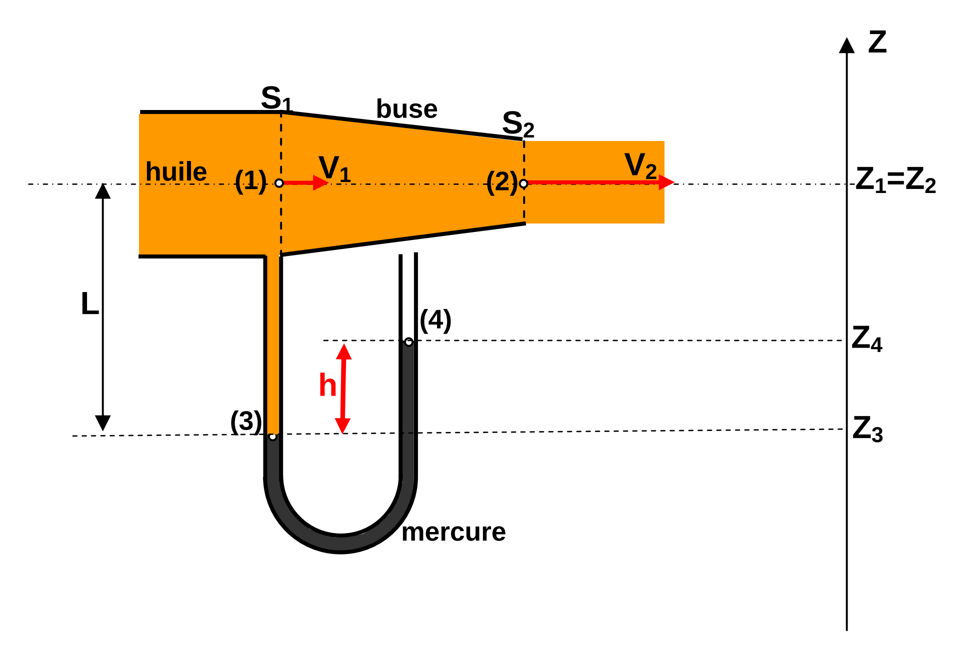
2) Equation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g.(Z_2 - Z_1) = 0$ Or $Z_1=Z_2$ et $V_1 = \frac{V_2}{4}$

Donc $\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{32}{15}.\frac{P_2 - P_1}{\rho}}}$ A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{32}{15}.\frac{2{,}875.10^5 - 10^5}{1000}} = 20 \ m/s}$

Exercice N°9: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 15-01-2007

1 ENONCE

De l'huile est accélérée à travers une buse en forme de cône convergent.



La buse est équipée d'un manomètre en U qui contient du mercure.

Partie 1 : Etude de la buse

Un débit volumique q_v= 0,4 L/s, l'huile traverse la section S_1 de diamètre d_1= 10 mm à une vitesse d'écoulement V_1 , à une pression P_1 et sort vers l'atmosphère par la section S_2 de diamètre d_2 à une vitesse d'écoulement $V_2=4.V_1$ et une pression $P_2=P_{atm}$=1 bar.

On suppose que :

- le fluide est parfait,
- la buse est maintenue horizontale ($Z_1=Z_2$).

On donne la masse volumique de l'huile : ρ_{huile} = 800 kg/m^3.

1) Calculer la vitesse d'écoulement V_1.

2) Ecrire l'équation de continuité. En déduire le diamètre d_2.

3) En appliquant le Théorème de Bernoulli entre le point (1) et le point (2) déterminer la pression P_1 en bar.

Partie 2 : Etude du manomètre (tube en U).

Le manomètre, tube en U, contient du mercure de masse volumique $\rho_{mercure}$=13600 kg/m^3. Il permet de mesurer la pression P_1 à partir d'une lecture de la dénivellation : $h = (Z_4-Z_3)$.

On donne :- (Z_1-Z_3)= L= 1274 mm.

- l'accélération de la pesanteur : g = 9,81 m/s^2.
- la pression P_4 = P_{atm}= 1 bar,

1) En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'hydrostatique) entre les points (1) et (3), déterminer la pression P_3.

2) De même, en appliquant la RFH entre les points (3) et (4), déterminer la dénivellation h du mercure.

2 REPONSE

Partie 1 : Etude de la buse

1) Vitesse d'écoulement : $V_1 = \frac{4.q_v}{\pi.d_1^2}$ A.N. $V_1 = \frac{4.0,4.10^{-3}}{\pi.0,01^2} = 5\, m/s$

2) Equation de continuité : $V_1.S_1 = V_2.S_2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}.d_1$ A.N. $d_2 = \sqrt{\frac{5}{20}}.10 = 5\, mm$

3) Equation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho_{huile}} + g(Z_2 - Z_1) = 0$ or Z_1=Z_2 et P_2=P_{atm}

Donc $P_1 = P_2 + \frac{1}{2}.\rho_{huile}.(V_2^2 - V_1^2)$

A.N. $P_1 = 10^5 + \frac{1}{2}.800.(20^2 - 5_1^2) = 2,5.10^5\ pascal = 2,5\, bar$

Partie 2 : Etude du manomètre (tube en U)

1) RFH entre (1) et (3) : $P_3 - P_1 = \rho_{huile}.g.(Z_1 - Z_3)$

$P_3 = P_1 + \rho_{huile}.g.L$ A.N. $P_3 = 2,5.10^5 + 800.9,81.1,274 = 2,6.10^5\ pascal = 2,6\, bar$

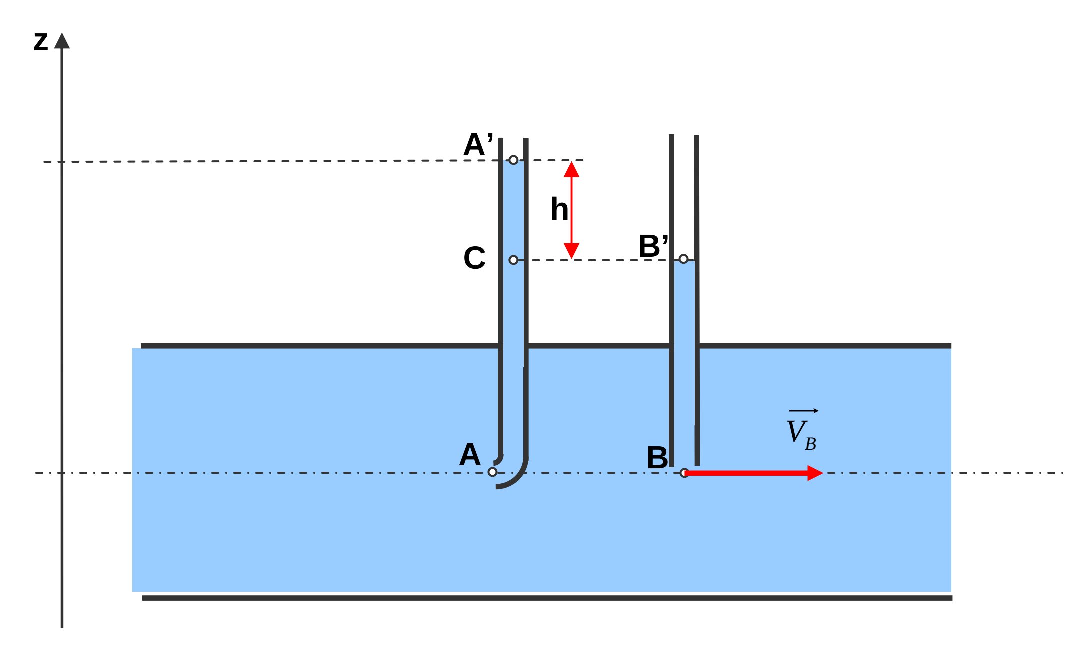
2) RFH entre (3) et (4) : $P_3 - P_4 = \rho_{mercure}.g.(Z_4 - Z_3)$ or (Z_4-Z_3)=h

Donc $h = \frac{P_3 - P_4}{\rho_{mercure}.g}$ A.N. $h = \frac{2,6.10^5 - 1.10^5}{13600.9,81} = 1,2\, m$

Exercice N°10:

1 ENONCE

On considère une conduite de diamètre intérieur d = 40 mm dans laquelle s'écoule de l'eau à une vitesse $\vec{V}$.



Afin de mesurer le débit volumique, la canalisation a été équipée de deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant et l'autre en B est le long des lignes de courant,

En mesurant la dénivellation h du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v

On admet les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est permanent.
- Le fluide est parfait et incompressible.
- Au point B, le liquide a la même vitesse $\vec{V}$ que dans la canalisation (V_B=V).
- Au point A (point d'arrêt) la vitesse d'écoulement est nulle (V_A=0).
- Les deux points A et B sont à la même hauteur (Z_A=Z_B).

On donne :

- la masse volumique de l'eau $\rho = 1000\, kg/m^3$,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2.

Travail demandé :

1) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et B. En déduire la pression P_A au point A en fonction de P_B, ρ et V.

2) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points A et A'

3) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points B et B'

4) Donner l'expression de V en fonction de g et h.

5) En déduire le débit volumique q_v. Faire une application numérique pour une dénivellation h= 3,2 cm.

2 REPONSE

1) Théorème de Bernoulli : $P_A + \rho.g.Z_A + \frac{1}{2}\rho.V_A^2 = P_B + \rho.g.Z_B + \frac{1}{2}.\rho.V_B^2$

or $Z_A=Z_B$, $V_A=0$ et $V_B=V$ donc $\boxed{P_A = P_B + \frac{1}{2}.\rho.V^2}$

2) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre A et A': $\boxed{P_A = P_{A'} + \rho.g.(Z_{A'} - Z_A)}$

3) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre B et B': $\boxed{P_B = P_{B''} + \rho.g.(Z_{B'} - Z_B)}$

4) En substituant P_A et P_B dans la relation de Bernoulli en obtient :

$P_{A'} + \rho.g.(Z_{A'} - Z_A) = P_{B'} + \rho.g.(Z_{B'} - Z_B) + \frac{1}{2}\rho.V^2$ or $P_{A'} = P_{B'} = P_a$, $Z_A=Z_B$ et $Z_{A'}-Z_{B'}=h$

donc $\frac{1}{2}\rho.V^2 = \rho.g.(Z_{A'} - Z_{B'})$

ou encore, $\boxed{V = \sqrt{2.g.h}}$

5) $\boxed{q_v = S.V = \frac{\pi.d^2}{4}.\sqrt{2.g.h}}$

A.N.: $\boxed{q_v = 1\ l/s}$.

Commentaire : *Les résultats de cet exercice permettent de donner une idée sur le principe de mesure d'une vitesse ou d'un débit à partir de la pression différentielle. Par exemple, on trouve sur les avion un instrument de mesure de la vitesse appelé « **tube de Pitot** » qui basé sur le même principe.*

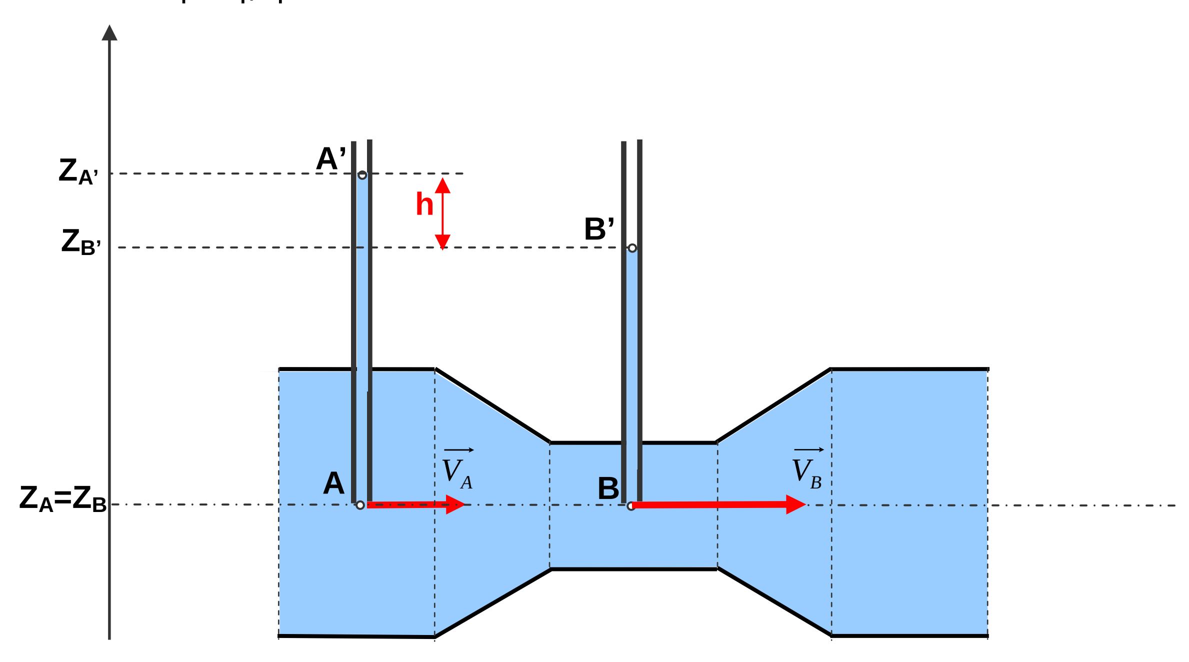
Exercice N°11:

1 ENONCE

Une conduite de section principale S_A et de diamètre d subit un étranglement en B où sa section est S_B. On désigne par $\alpha = \frac{S_A}{S_B}$ le rapport des sections.

Un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ, s'écoule à l'intérieur de cette conduite.

Deux tubes plongent dans la conduite ayant des extrémités respectivement A et B. Par lecture directe de la dénivellation h, les deux tubes permettent de mesurer le débit volumique q_v qui traverse la conduite.



1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de la vitesse V_B en fonction de V_A et α.

2) Ecrire la relation de Bernoulli entre les points A et B. En déduire l'expression de la différence de pression (P_A-P_B) en fonction de ρ, V_A et α.

3) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points A et A'.

4) Ecrire la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points B et B'.

5) En déduire l'expression de la vitesse d'écoulement V_A en fonction de g, h, et α.

6) Donner l'expression du débit volumique q_v en fonction de d, g, h, et α.

Faire une application numérique pour :

- un diamètre de la section principale d=50 mm,
- un rapport de section $\alpha = 2$,

- une accélération de pesanteur : g= 9,81 m/s^2,
- une dénivellation h=10 mm.

2 REPONSE

1) Equation de continuité : $V_A.S_A = V_B.S_B$ d'où $V_B = V_A.\frac{S_A}{S_B}$ donc $\boxed{V_B = V_A.\alpha}$

2) $P_A + \rho.g.Z_A + \frac{1}{2}\rho.V_A^2 = P_B + \rho.g.Z_B + \frac{1}{2}\rho.V_B^2$

Or $Z_A=Z_B$ Donc $P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho.(\alpha.V_A)^2 - \frac{1}{2}\rho.V_A^2$

ou encore,

$\boxed{P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho.V_A^2.(\alpha^2 - 1)}$ (1)

3) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points A et A' :

$\boxed{P_A - P_{A'} = \rho.g.(Z_{A'} - Z_A)}$ (2)

4) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points B et B' :

$\boxed{P_B - P_{B'} = \rho.g.(Z_{B'} - Z_B)}$ **(3)**

5) On sait que $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm}$ et $Z_A=Z_B$

Donc

$$P_A - P_B = (P_A - P_{A'}) - (P_B - P_{B'}) = \rho.g.[(Z_{A'} - Z_A) - (Z_{B'} - Z_B)] = \rho.g.(Z_{A'} - Z_{B'}) = \rho.g.h$$

D'après la relation (1)

$\rho.g.h = \frac{1}{2}\rho.V_A^2(\alpha^2 - 1)$ Donc $\boxed{V_A = \sqrt{\frac{2.g.h}{(\alpha^2 - 1)}}}$

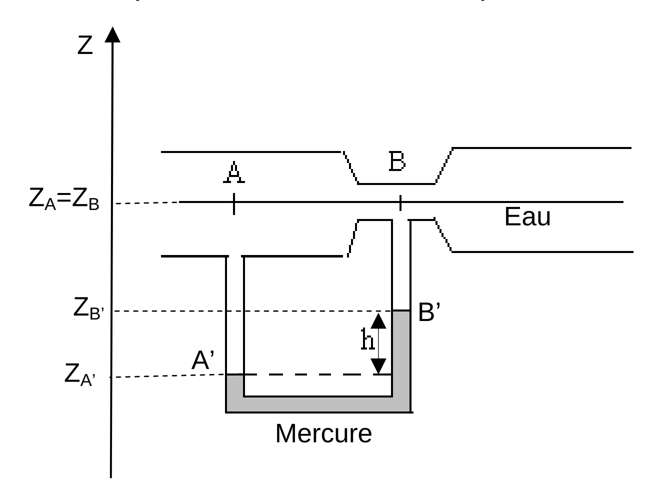
6) On sait que $q_v = S_A.V_A$ ou encore, $\boxed{q_v = \frac{\pi.d^2}{4}.\sqrt{\frac{2.g.h}{(\alpha^2 - 1)}}}$ A.N.: $\boxed{q_v = 0,5 \text{ l/s}}$.

Commentaire : *Nous avons aboutit dans cet exercice à une relation entre le débit q_v et la dénivellation h. On peut exploiter ce résultat dans plusieurs applications pratiques pour la mesure de débit. Par exemple en industrie chimique, on trouve souvent des **tubes de venturi** comme instrument de mesure de cette grandeur.*

Exercice N°12: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 05-06-2006

1 ENONCE

Dans une canalisation horizontale de diamètre D = 9 cm, on veut mesurer le débit d'eau. On intercale un tube de Venturi (D = 9 cm, d = 3 cm). La dénivellation h du mercure dans un tube en U peut être mesurée avec précision.



On donne :

- la masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1000$ kg/m^3,
- la masse volumique du mercure : $\rho_{mercure} = 13600$ kg/m^3,
- l'accélération de la pesanteur : g = 9,81 m/s^2.

Travail demandé :

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire la vitesse moyenne d'écoulement V_B au col dans la section S_B en fonction de la vitesse V_A dans la section S_A.

2) En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points A' et B' relative à l'équilibre du mercure, déterminer la différence de pression: $(P_{A'} - P_{B'})$ en fonction de g, $\rho_{mercure}$, $Z_{A'}$ et $Z_{B'}$.

3) De même, déterminer l'expression de la différence de pression $(P_A - P_{A'})$ en fonction de g , ρ_{eau}, $Z_{A'}$ et Z_A.

4) De même, déterminer l'expression de la différence de pression $(P_{B'} - P_B)$ en fonction de g , ρ_{eau}, $Z_{B'}$ et Z_B.

5) En utilisant les équations établies dans les questions 2), 3) et 4), donner la relation entre $(P_A - P_B)$ en fonction de $\rho_{mercure}$, ρ_{eau}, g et h.

6) En faisant l'hypothèse que l'eau est un fluide parfait, et en appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B, donner l'expression de la vitesse d'écoulement V_A en fonction de la différence de pression $(P_A - P_B)$, ρ_{eau}.

7) En déduire l'expression du débit volumique Q_v en fonction de D, $\rho_{mercure}$, ρ_{eau}, g ,h.

8) Faire une application numérique pour une dénivellation h= 4 mm.

2 REPONSE

1) Equation de continuité : $S_A.V_A = S_B.V_B$.

La vitesse au col dans $V_B = \frac{S_A}{S_B}.V_A = \left(\frac{D}{d}\right)^2.V_A = 9.V_A$

2) RFH entre les points A' et B' $P_{A'} - P_{B'} = \rho_{mercre}.g.(Z_{B'} - Z_{A'})$

3) RFH entre les points A et A' $P_A - P_{A'} = \rho_{eau}.g.(Z_{A'} - Z_A)$

4) RFH entre les points B' et B $P_{B'} - P_B = \rho_{eau}.g.(Z_B - Z_{B'})$

5) En faisant la somme de 2), 3) et 4) :

$$P_A - P_B = (\rho_{mercure} - \rho_{eau}).g.(Z_{B'} - Z_B) = (\rho_{mercure} - \rho_{eau}).g.h$$

6) Théorème de Bernoulli entre A et B, $\frac{V_A^2 - V_B^2}{2} + \frac{P_A - P_B}{\rho} + g.(Z_A - Z_B) = 0$

Or $Z_A = Z_B$ et $V_B = 9\ V_A$

Donc $V_A = \sqrt{\frac{(\rho_{mercure} - \rho_{eau}).g.h}{40.\rho_{eau}}}$

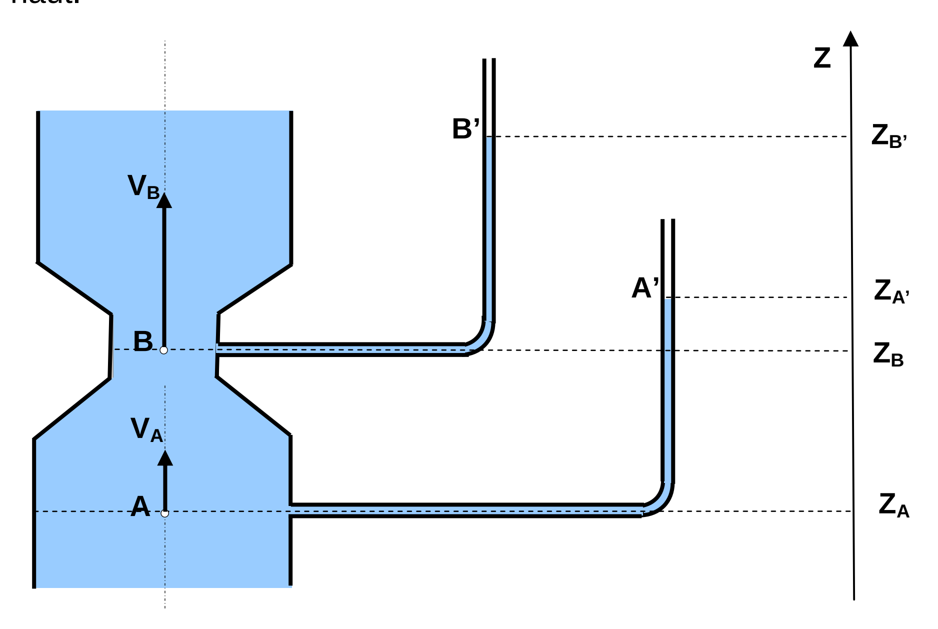
7) Débit volumique : $q_v = S_A.V_A = \frac{\pi.D^2}{4}\sqrt{\frac{(\rho_{mercure} - \rho_{eau}).g.h}{40.\rho_{eau}}}$

8) Application numérique : $q_v = \frac{\pi.0,09^2}{4}\sqrt{\frac{(13600 - 1000).9,81.0,004}{40.1000}} = 7.10^{-4}\,m^3/s$

Exercice N°13: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 04-01-2008

1 ENONCE

Dans le tube de Venturi représenté sur le schéma ci-dessous, l'eau s'écoule de bas en haut.



Le diamètre du tube en A est d_A= 30 cm, et en B il est de d_B=15 cm.

Afin de mesurer la pression P_A au point A et la pression P_B au point B, deux manomètres à colonne d'eau (tubes piézimétriques) sont connectés au Venturi.

Ces tubes piézimétriques sont gradués et permettent de mesurer les niveaux $Z_{A'}$=3,061m et $Z_{B'}$ =2,541 m respectivement des surfaces libres A' et B'.

On donne :

- l'altitude de la section A : Z_A= 0 m,
- l'altitude de la section B : Z_B= 50 cm,
- l'accélération de la pesanteur est g=9,8 m/s^2.
- la pression au niveau des surfaces libres $P_{A'}$=$P_{B'}$= P_{atm}=1bar.
- la masse volumique de l'eau est ρ=1000 kg/m^3.

On suppose que le fluide est parfait.

1) Appliquer la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) entre B et B', et calculer la pression P_B au point B.

2) De même, calculer la pression P_A au point A.

3) Ecrire l'équation de continuité entre les points A et B. En déduire la vitesse d'écoulement V_B en fonction de V_A.

4) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points A et B.

En déduire la vitesse d'écoulement V_B.

2 REPONSE

1) RFH entre B et B' : $P_B - P_{B'} = (Z_{B'} - Z_B) \Rightarrow \boxed{P_B = P_{B'} + \rho g.(Z_{B'} - Z_B)}$

A.N. $\boxed{P_B = 10^5 + 1000.9{,}8.(2{,}541 - 0{,}5) = 120001\, Pascal = 1{,}2\, bar}$

2) RFH entre A et A' : $P_A - P_{A'} = (Z_{A'} - Z_A) \Rightarrow \boxed{P_A = P_{A'} + \rho g.(Z_{A'} - Z_A)}$

A.N. $\boxed{P_A = 10^5 + 1000.9{,}8.(3{,}061 - 0) = 130007\, Pascal = 1{,}3\, bar}$

3) Equation de continuité : $S_A.V_A = S_B.V_B \Rightarrow V_B = \frac{S_A}{S_B}.V_A = \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2.V_A \Rightarrow \boxed{V_B = 4.V_A}$

4) Equation de Bernoulli : $\frac{V_A^2 - V_B^2}{2} + \frac{P_A - P_B}{\rho} + g(Z_A - Z_B) = 0$ avec $V_B = 4.V_A$

Donc $\boxed{V_B = \sqrt{\frac{2}{4^2 - 1}.\left(\frac{P_A - P_B}{\rho} + g(Z_A - Z_B)\right)}}$

A.N. $\boxed{V_B = \sqrt{\frac{2}{4^2 - 1}.\left(\frac{1{,}3.10^5 - 1{,}2.10^5}{1000} + 9{,}8.(0 - 0{,}5)\right)} = 0{,}8246\, m/s}$

Exercice N°14:

1 ENONCE

Le fioul contenu dans le réservoir source (1) est transféré vers le réservoir (2) par l'intermédiaire d'une pompe et d'une canalisation.

On donne :

- Le débit volumique q_v= 200 l/s.
- La densité du fioul d= 0,85.
- Z_1=15 m et Z_2=55 m

Déterminer, alors, la puissance P_a mécanique sur l'arbre de la pompe si son rendement est de 0,8.

On suppose que les niveaux des réservoirs varient lentement.

2 REPONSE

Appliquons le Théorème de Bernoulli entre les surfaces libres S_1 et S_2 :

$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1) + (P_2 - P_1) = \frac{P_n}{q_V}$ or $P_1 = P_2 = P_{atm}$ et $V_1 = V_2$ par hypothèse

Donc $P_n = q_v \times [\rho g(z_2 - z_1)]$ or $\eta = \dfrac{P_n}{P_a}$

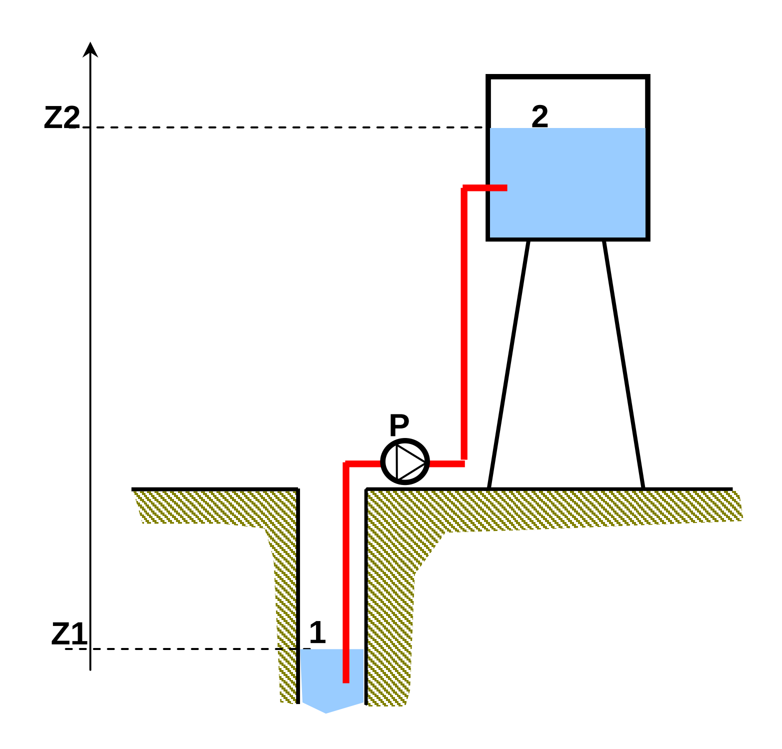
donc $\boxed{P_a = \dfrac{1}{\eta}.q_v \times [\rho g(z_2 - z_1)]}$ A.N.: $\boxed{P_a=83,385 \text{ kW}}$.

Commentaire : *Le calcul de la puissance de la pompe est un calcul grossier. Nous avons supposé que le fluide était parfait alors qu'en réalité l'écoulement d'un fluide réel est plus complexe qu'un fluide idéal. En toute rigueur il faut prendre en considération le phénomène de frottement visqueux. C'est l'objet de chapitre 4.*

Exercice N°15: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 19-06-2002

1 ENONCE

Une pompe P alimente un château d'eau à partir d'un puit à travers une conduite de diamètre **d= 150 mm**.



On donne :

- les altitudes :Z_2=26 m, Z_1= - 5 m,
- les pressions P_1=P_2=1,013 bar ;
- la vitesse d'écoulement V = 0.4 m/s,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2.

On négligera toutes les pertes de charge.

Travail demandé :

1) Calculer le débit volumique Q_v de la pompe en l/s.

2) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les surfaces 1 et 2.

3) Calculer la puissance utile Pu de la pompe.

4) En déduire la puissance Pa absorbée par la pompe sachant que son rendement est de 80%.

2 REPONSE

1) Débit volumique : $q_V = V.\frac{\pi.d^2}{4}$ A.N. $q_V = 0{,}4.\frac{\pi.0{,}15^2}{4} = 7.10^{-3}\ m^3/s = 7\ L/s$

2) Equation de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible (avec échange de travail) : $\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(Z_2 - Z_1) = \frac{P_u}{\rho.q_v}$

3) Puissance utile de la pompe : $P_u = q_v.\rho.g.(H_1 + H_2)$

A.N. $P_u = 7.10^{-3}.1000.9{,}81.(26+5) = 2128{,}77\ w$

4) Puissance absorbée par la pompe : $P_a = \frac{P_u}{\eta}$ A.N. $P_a = \frac{2128{,}77}{0{,}8} = 2661\ w$

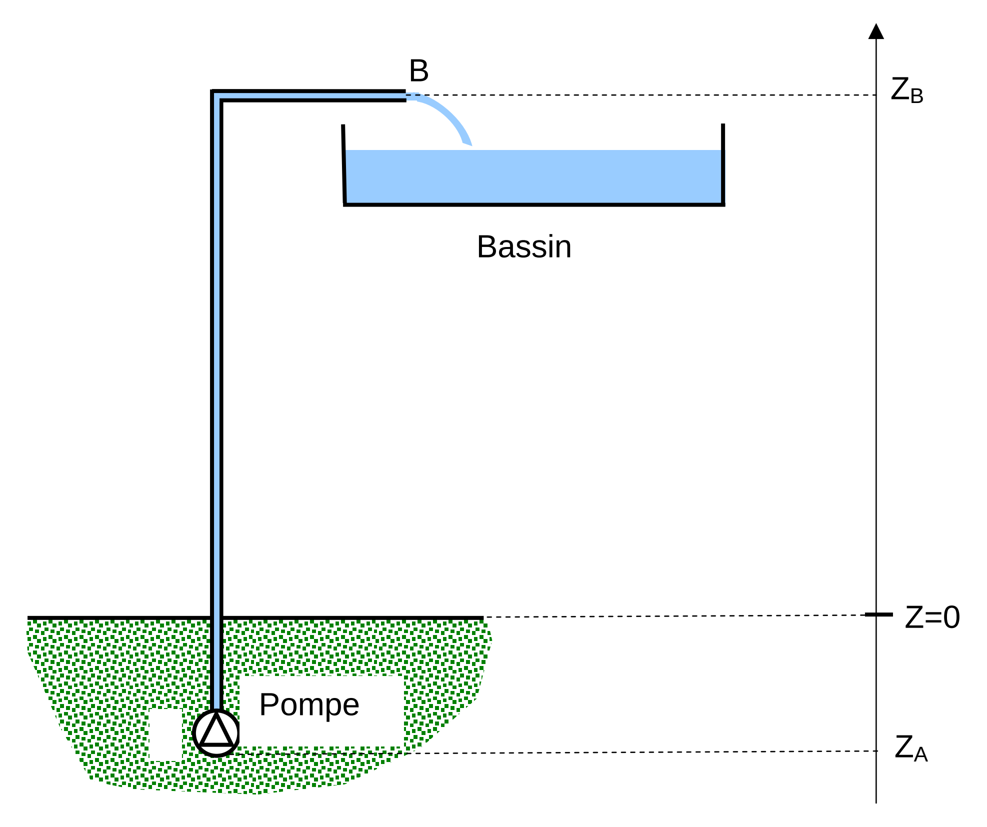
Exercice N°16: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 02-06-2008

1 ENONCE

On désire remplir un bassin en pompant de l'eau à partir de la nappe phréatique. Pour cela, on utilise une pompe immergée qui aspire l'eau à partir du point A, situé à une altitude Z_A=-26 m. La pression au point A est P_A=2 bar.

L'eau refoulée par la pompe est ensuite acheminée dans une conduite de section circulaire et de diamètre intérieur d=31 mm.

L'eau est évacuée avec un débit volumique q_v= 2772 litre/heure par le point B situé à une altitude Z_B=30 m. On admet que la pression au point B est P_B=1 bar.



La pompe est actionnée par un moteur électrique. Le rendement de l'ensemble moto- pompe est η=80%.

On suppose que :

- le fluide est parfait,
- la vitesse d'aspiration est égale à la vitesse de refoulement (V_A=V_B=V).

On donne :

- la masse volumique de l'eau ρ=1000 kg/m^3,
- l'accélération de la pesanteur g=9,81 m/s^2.

Travail demandé :

1) Calculer le débit massique q_m de la pompe.

2) Quelle est la vitesse d'écoulement V de l'eau ?

3) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la puissance nette P_n fournie par la pompe.

4) Calculer la puissance électrique consommée P_e.

2 REPONSE

1) Débit massique : $\boxed{q_m = \rho . q_v}$ A.N. $\boxed{q_m = 1000.\frac{2772.10^{-3}}{3600} = 0{,}77\ kg/s}$

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.\frac{2772.10^{-3}}{3600}}{\pi.0{,}031^2} = 1{,}02\ m/s$

3) Equation de Bernoulli : $\frac{V_B^2 - V_A^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho} + g.(Z_B - Z_A) = \frac{P_n}{q_m}$

or V_A=V_B donc $P_n = q_m.\left[\frac{P_B - P_A}{\rho} + g.(Z_B - Z_A)\right]$

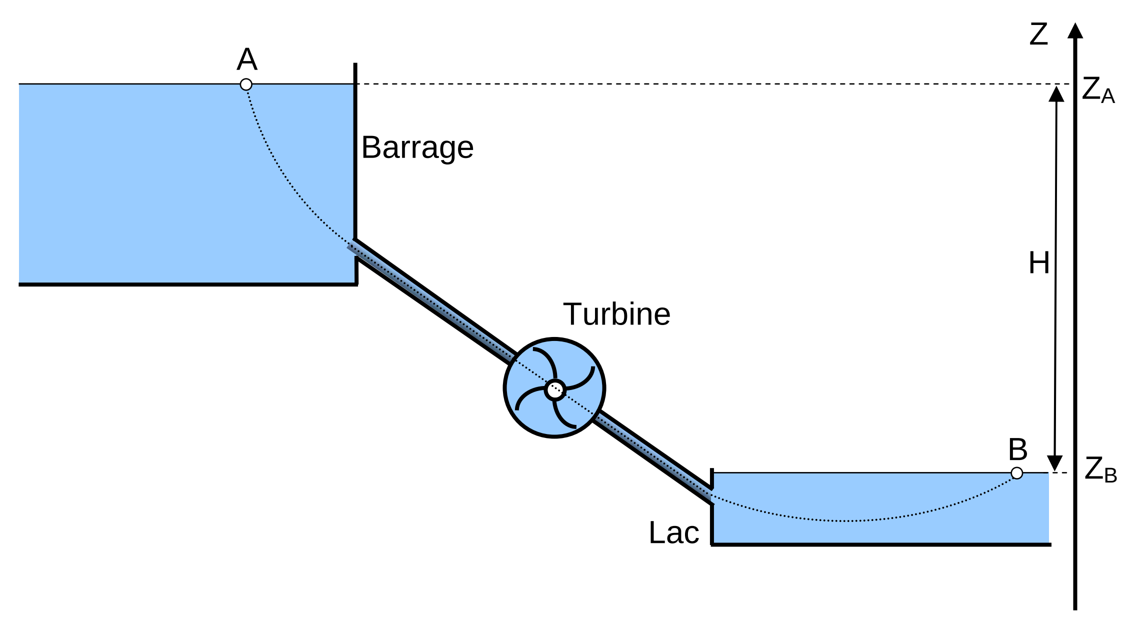
A.N. $P_n = 0{,}77.\left[\frac{1.10^5 - 2.10^5}{1000} + 9{,}81.(30 - -26)\right] = 346\ watt$

4) Puissance électrique : $P_e = \frac{P_n}{\eta}$ A.N $P_e = \frac{346}{0{,}8} = 432\ watt$

Exercice N°17: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 30-04-2007

1 ENONCE

Une conduite cylindrique amène l'eau d'un barrage (dont le niveau Z_A est maintenu constant) dans une turbine.



On branche à la sortie de la turbine une canalisation évacuant l'eau vers un lac. Le niveau Z_B de la surface libre du lac est supposé constant.

Le débit massique traversant la turbine est Q_m= 175 kg/s.

On donne : l'accélération de la pesanteur g= 9,8 m/s^2 et H=(Z_A-Z_B)=35 m.

1) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la puissance utile P_u développée dans la turbine. Préciser toutes les hypothèses simplificatrices.

2) Calculer la puissance récupérée sur l'arbre de la turbine si son rendement global est η=70%.

2 REPONSE

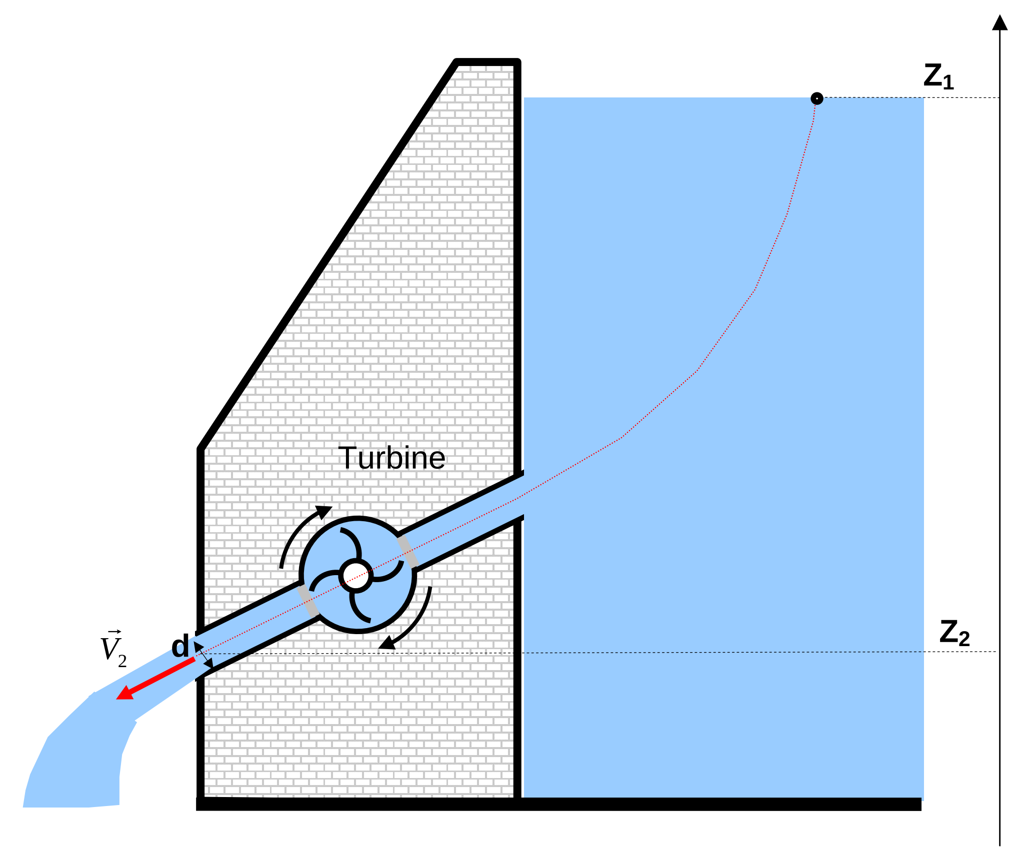
1) Théorème de Bernoulli : $\frac{V_B^2 - V_A^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho} + g.(Z_B - Z_A) = \frac{P_u}{Q_m}$

or $P_A=P_B=P_{atm}$ et $V_A=V_B=0$. Donc $\boxed{P_u = Q_m.g.H}$ A.N $\boxed{P_u = 175.9{,}8.35 = 60025\ w}$

2) Puissance récupérée sur l'arbre de la turbine $\boxed{P_a = P_u.\eta}$ A.N. $\boxed{P_a = 45018\ w}$

Exercice N°18: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 06-02-2003

1 ENONCE



La figure ci-dessus représente un barrage qui est équipé d'une turbine dont les aubes sont entraînées par un jet d'eau sous pression.

La conduite de sortie de diamètre d= 2,5 m est située à une altitude Z_1=5m. Le débit volumique q_v=25 m^3/s. On suppose que le niveau d'eau dans le barrage

(Z_1=30 m) varie lentement (V_1=0), et les pertes de charges sont évaluées à J_{12} =-32,75 J/kg.

On donne :

- la masse volumique de l'eau: ρ =1000 kg/m^3
- l'accélération de la pesanteur :g=9,81 m/s^2

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse V_2 d'écoulement d'eau à la sortie de la canalisation en m/s.

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la puissance P_a disponible sur l'arbre de la turbine en MW si son rendement η est de 60%

2 REPONSE

1) $V_2 = \frac{4.q_v}{\pi.d^2} = \frac{4.25}{\pi.2{,}5^2} = 5{,}093\, m/s$

2) Equation de Bernoulli : $\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(Z_2 - Z_1) = \frac{P_n}{\rho.q_v} + J_{12}$

Or P_1=P_2, V_1=0 et $P_a = \eta.P_n$

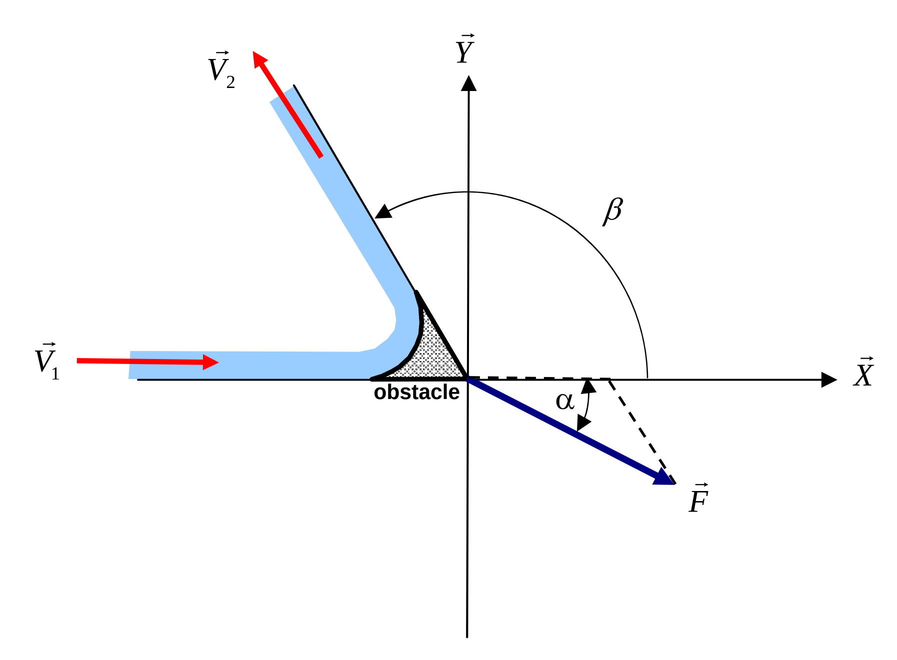
donc : $P_a = \eta.\rho.q_v.\left[g(Z_2 - Z_1) + \frac{V_2^2}{2} - J_{12} \right]$

A.N. $P_a = 0{,}6.1000.25.\left[9{,}81.(5-30) + \frac{25}{2} + 32{,}75 \right] = -3.10^6\, w = -3MW$

Exercice N°19: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 16-06-2008

1 ENONCE

La figure ci-dessous représente un jet d'eau horizontal qui frappe un obstacle à un débit massique q_m=2 kg/s. L'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle β=120°.



On désigne par $\vec{V}_1$ la vitesse d'écoulement de l'eau en entrée de l'obstacle. Elle est portée par l'axe $\vec{X}$, $\vec{V}_2$ désigne la vitesse d'écoulement de l'eau en sortie de l'obstacle. Elle est portée par une direction inclinée de l'angle β =120° par rapport à l'axe $\vec{X}$.

On admettra que $\left\|\vec{V}_1\right\| = \left\|\vec{V}_2\right\|$=3 m/s.

1) En appliquant le théorème d'Euler, donner l'expression vectorielle de la force $\vec{F}$ exercée par le liquide sur l'obstacle en fonction de q_m, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ensuite calculer ses composantes F_x et F_y.

2) Quel est son angle d'inclinaison α ?

2 REPONSE

1) $$\vec{F} = q_m.(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = q_m.\left\|\vec{V}_1\right\|.\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_x = q_m.\left\|\vec{V}_1\right\|.(1-\cos\beta) \\ F_y = -q_m.\left\|\vec{V}_1\right\|.\sin\beta \end{Bmatrix}$$

A.N. $$\begin{Bmatrix} F_x = 2.3.(1 - -0,5) = 9\ N \\ F_y = -2.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = -5,19\ N \end{Bmatrix}$$

2) $$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$ A.N : $$tg\alpha = \frac{-5,19}{9} = -0,5773 \Rightarrow \alpha = -30°$$

Chapitre 4 : *DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES REELS*

1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un ***fluide réel*** est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique ***Osborne Reynolds***.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel…etc.)

2 FLUIDE REEL

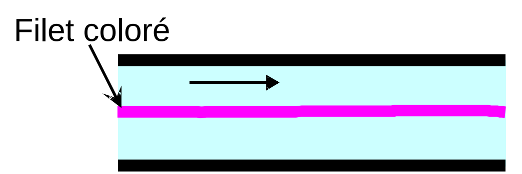
Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

3 REGIMES D'ECOULEMENT - NOMBRE DE REYNOLDS

Les expériences réalisées par ***Reynolds*** en1883 lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : régime laminaire et régime turbulent :

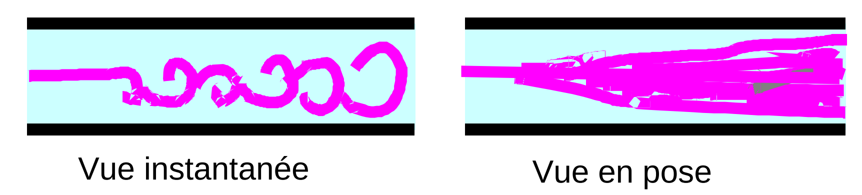
- Régime laminaire :

Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.



- Régime turbulent :

Les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes.



Vue instantanée   Vue en pose

Des études plus fines ont montré qu'il existe encore une subdivision entre :

- les écoulements turbulents lisses et
- les écoulements turbulents rugueux.

La limite entre ces différents types d'écoulements est évidemment difficile à appréhender.

En utilisant divers fluides à viscosités différentes, en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds donné par l'expression suivante:

$$R_e = \frac{V.d}{\nu}$$

- V : Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en (m/s)
- d : Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en (m).
- ν : Viscosité cinématique du fluide (m^2/s).

Résultats empirique à titre indicatif :

Si $R_e < 2000$ l'écoulement est laminaire

Si $R_e > 2000$ l'écoulement est turbulent :

- Lisse si $2000<R_e<100000$
- Rugueux si $R_e>100000$

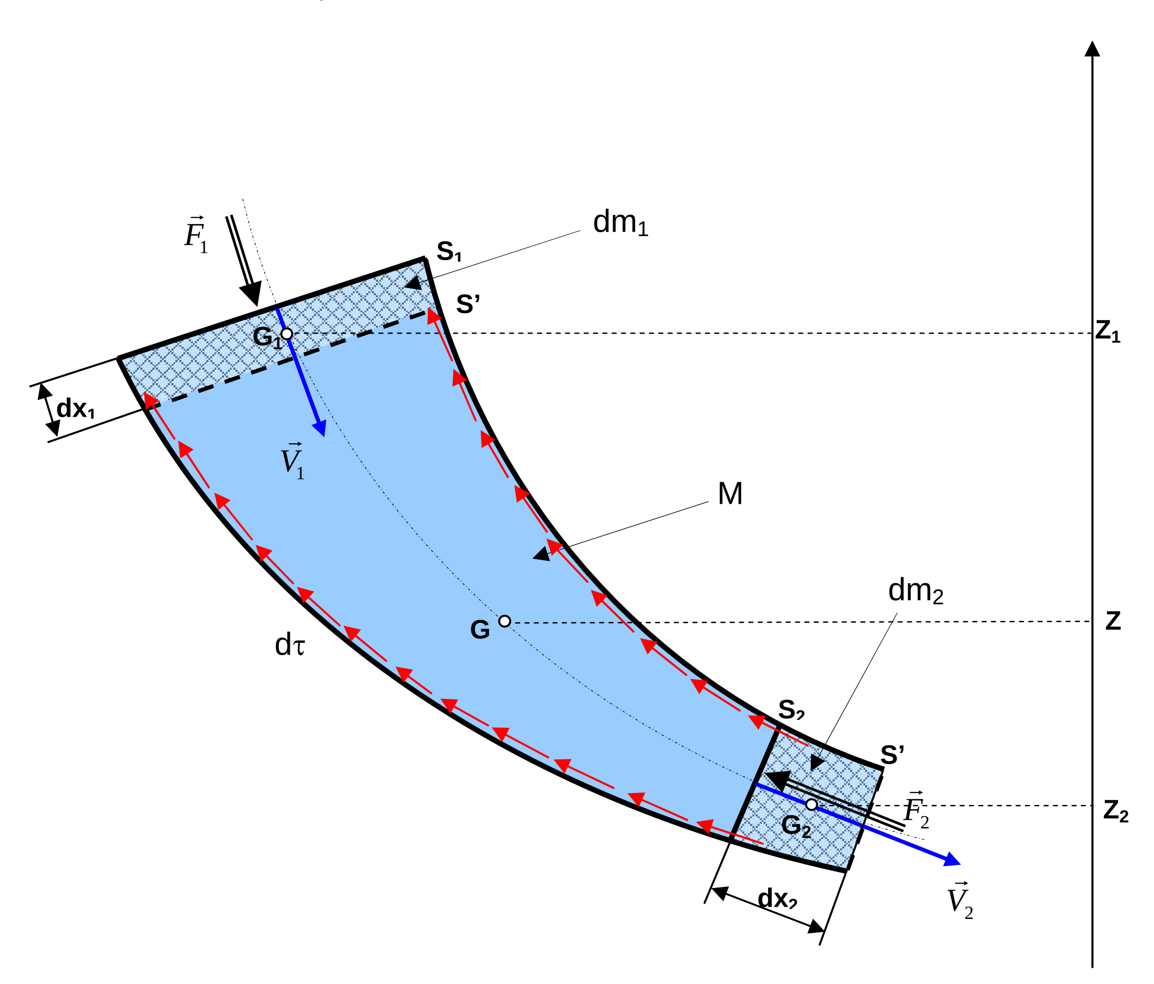
4 PERTES DE CHARGES

4.1 Définition

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite, tel que entre les points (1) et (2) il n'y ait pas de machine hydraulique.

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 du chapitre 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est réel et incompressible : cela suppose l'existence de forces élémentaire de frottement visqueux dτ qui contribue dans l'équation de bilan par un travail négatif et donner naissance à des pertes de charges.
- L'écoulement est permanent.



On considère un axe $\vec{Z}$ vertical dirigé vers le haut. On désigne par Z_1, Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1, dm_2 et M.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.

A l'instant t le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2}\frac{dm.V^2}{2}$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm_2) est compris entre S'_1 et S'_2. Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2}\frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :

« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures ». On prendra en considération cette fois ci le travail des forces de frottement visqueux $d\tau$.

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces\ de\ pression} + \sum W_{d\tau} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 + \sum W_{d\tau}$$
$$\Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 + \sum W_{d\tau} = P_1.dV_1 - P_2.dV_2 + \sum W_{d\tau}$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2 + \sum W_{d\tau}$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$

Et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

on aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$$

On défini la perte de charge entre les points (1) et (2) par $J_{12} = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$ qui est la perte d'énergie par frottement visqueux par unité de masse qui passe.

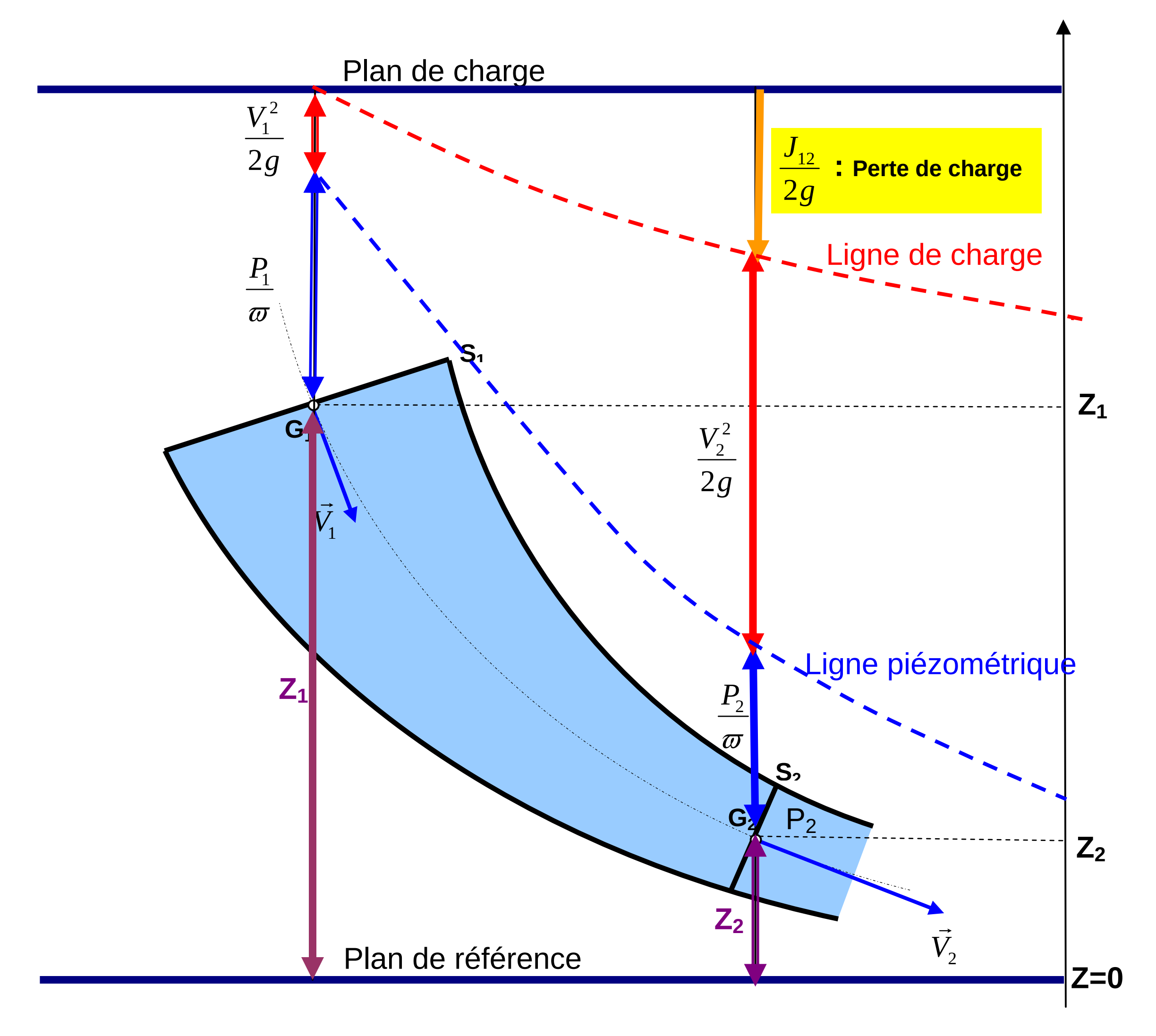
$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = J_{12} \quad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg)

En divisant par g la relation (4) devient homogène à des longueurs en mètre :

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\varpi} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\varpi} + z_1 + \frac{J_{12}}{g}$$

Elle peut être interprétée graphiquement de la manière suivante :



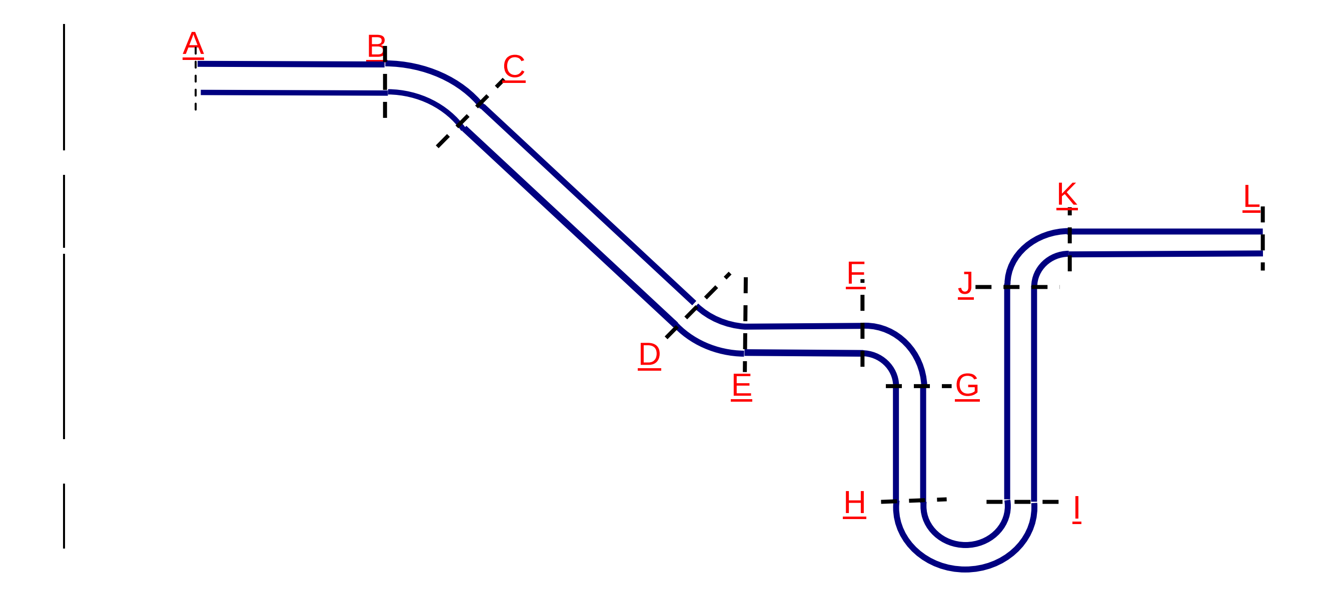
Portons sur la verticale, à partir du centre de gravité G_1 de la section S_1 une distance égale à $\frac{P_1}{\varpi}$. Le lieu de toutes les extrémités de ces segments s'appelle ***ligne piézométrique***.

Portons sur la verticale au dessus de la ligne piézométrique la quantité $\frac{V_1^2}{2.g}$. Le lieu de toutes les extrémités de ces segments représente ***la ligne de charge***.

En l'absence de pertes de charge, la ligne de charge est confondue avec le plan de charge. Ce plan de charge donne une représentation graphique de la constance tirée de l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait. La perte de charge totale exprimée en hauteur de liquide depuis le début de l'écoulement, est égale à la distance entre la ligne de charge et le plan de charge, mesurée sur la verticale passant par le point G_1. La perte de charge entre deux points G_1 et G_2 de l'écoulement est donnée par la différence de cote de la ligne de charge sur les verticales passant par les points précédents.

La perte de charge J_{12} peut être due à une perte de charge linéaire et une perte de charge singulière : $\boxed{J_{12} = J_s + J_L}$

Par exemple, dans le circuit représenté dans la figure ci-dessous, les tronçons BC, DE, FG, HI et JK sont des coudes de différents angles, donc elles présentent des pertes de charge singulières. Les tronçons AB, CD, EF, GH, IJ et KL sont des conduites rectilignes, donc elles présentent des pertes de charge linéaires.



4.2 Pertes de charge singulières

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction, il se produit des pertes de charges dites singulières, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation.

On les exprime par :

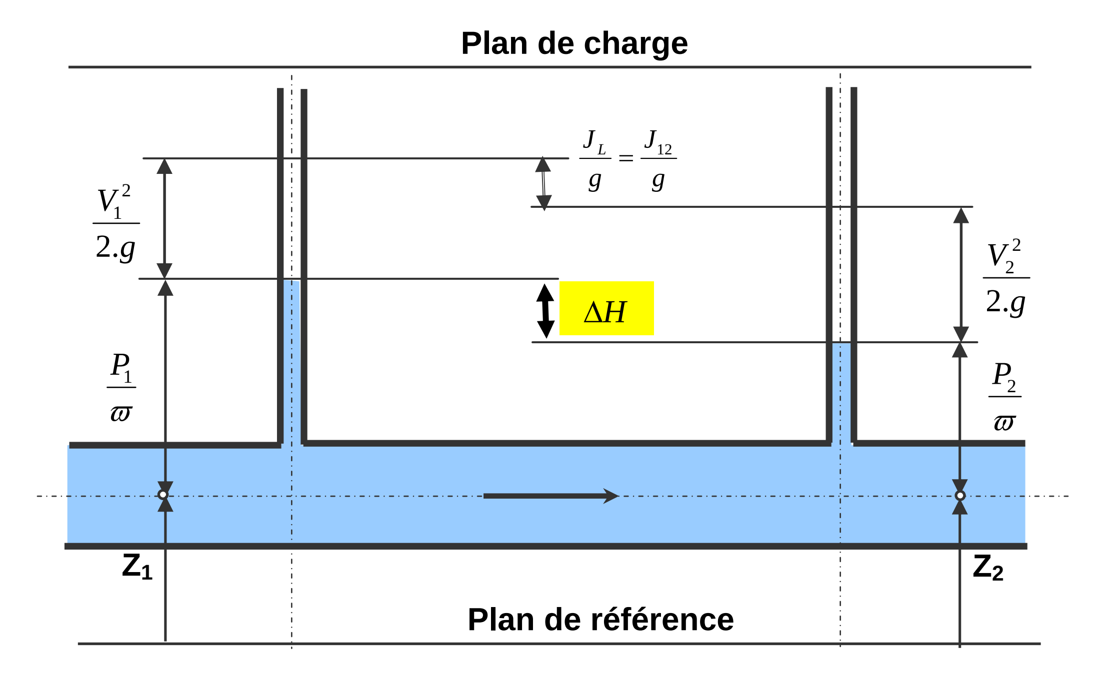
$$J_s = -K_s.\frac{V^2}{2}$$ où s : indice de l'accident de forme de la conduite.

K_s : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme.

Les valeurs de K_s sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

4.3 Pertes de charges linéaires :

Les pertes de charges linéaires, sont des pertes de charge réparties régulièrement le long des conduites. En chaque point d'un écoulement permanent, les caractéristiques de l'écoulement sont bien définies et ne dépendent pas du temps. La représentation graphique de l'écoulement prend l'allure ci-dessous.



La vitesse étant constante, la ligne piézométrique et la ligne de charge sont parallèles. La variation de hauteur piézométrique, évaluée en hauteur de liquide est égale à la perte de charge linéaire entre les deux points de mesure.

Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur L de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre d, proportionnelle au carré de la vitesse débitante V du fluide.

$$J_L = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)$$ où

- V : vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite (m/s)
- L : longueur de la conduite (m)
- d : diamètre de la conduite (m)
- λ : coefficient de perte de charge linéaire. Il dépend du régime d'écoulement et notamment du nombre de Reynolds R_e.

Dans un régime d'écoulement laminaire : $R_e < 2000$

$$\lambda = \frac{64}{R_e}$$ (Formule de Poiseuille)

Dans un régime d'écoulement turbulent lisse : $2000 < R_e < 10^5$

$$\lambda = 0{,}316.R_e^{-0{,}25}$$ (Formule de Blasius)

Dans un régime d'écoulement turbulent rugueux : $R_e > 10^5$

$$\lambda = 0{,}79.\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$$ (Formule de Blench)

avec :

- ε : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)
- d : diamètre intérieur de la conduite (mm)

Parfois, on lit la valeur de λ sur un abaque établie par Moody.

5 THEOREME DE BERNOULLI APPLIQUE A UN FLUIDE REEL

Considérons un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite. On suppose éventuellement, qu'il existe entre (1) et (2) des machines hydrauliques.

On note :

J_{12} : Somme de toutes les pertes de charge, singulière et linéaires entre les sections (1) et (2).

P_n : Puissance mécanique échangé entre le fluide et les machines éventuellement placées entre (1) et (2).

Le Théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante :

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(z_2 - z_1) = J_{12} + \frac{P_n}{q_m}$$

6 CONCLUSION

Les formules exposées dans ce chapitre relatives aux pertes de charge constituent un outil de calcul grossier permettant d'obtenir des valeurs approximatives. Même s'il demeurerait grossier, il serait néanmoins très utile pour une tâche de conception ou l'on privilégie la simplicité et la rapidité d'exécution quitte à perdre un peu de précision.

7 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice N°1: Extrait de l'examen du 15-01-2007

1 ENONCE

Déterminer le régime d'écoulement dans une conduite de 3 cm de diamètre pour:

1) De l'eau circulant à la vitesse v=10,5 m/s et

de viscosité cinématique 1.10^{-6} m^2/s

2) Du fuel lourd à 50 °C circulant à la même vitesse

(Viscosité cinématique 110.10^{-6} m^2/s).

3) Du fuel lourd à 10 °C circulant à la même vitesse

(Viscosité cinématique 290.10^{-6} m^2/s).

2 REPONSE

1) On calcule le nombre de Reynolds : $R = \frac{V.d}{\nu}$

A.N. $R = \frac{10,5.0,03}{1.10^{-6}} = 315000 \rangle 100000$: donc l'écoulement est turbulent rugueux.

2) $R = \frac{10,5.0,03}{110.10^{-6}} = 2863,63$: $2000 \langle R \langle 100000$ l'écoulement est turbulent lisse

3) $R = \frac{10,5.0,03}{290.10^{-6}} = 1086,2$: $R \langle 2000$ donc l'écoulement est laminaire.

Exercice N°2: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 17-01-2005

1 ENONCE

Du fuel lourd de viscosité dynamique $\mu = 0{,}11 \quad Pa.s$ et de densité d=0,932 circule dans un tuyau de longueur L=1650 m et de diamètre D=25 cm à un débit volumique q_V=19,7 l/s.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000 \quad kg/m^3$.

Travail demandé :

1) Déterminer la viscosité cinématique ν du fuel.

2) Calculer la vitesse d'écoulement V.

3) Calculer le nombre de Reynolds Re.

4) En déduire la nature de l'écoulement.

5) Déterminer le coefficient λ de pertes de charge linéaire.

6) Calculer la perte de charge J_L dans le tuyau.

2 REPONSE

1) Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{d.\rho_{eau}}$ A.N. $\nu = \frac{0{,}11}{1000.0{,}932} = 118.10^{-6} \; m^2/s$

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_V}{\pi.D^2}$ A.N. $V = \frac{4.19{,}7.10^{-3}}{\pi.0{,}25^2} = 0{,}4013 \, m/s$

3) Nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \frac{V.D}{\nu}$ A.N. $\mathrm{Re} = \frac{0{,}4013.0{,}25}{118.10^{-6}} = 850{,}222$

4) $\mathrm{Re} < 2000$ donc l'écoulement est laminaire.

5) Formule de poiseuille : $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$

A.N. $\lambda = \frac{64}{850{,}211} = 0{,}07527$

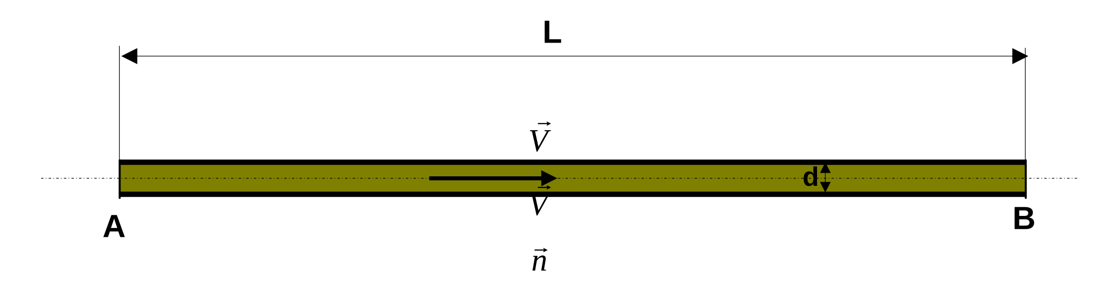
6) Perte de charge linéaire : $J_L = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{D}\right)$

A.N. $J_L = -0{,}07527.\frac{0{,}4013^2}{2}.\left(\frac{1650}{0{,}25}\right) = 40 \; J/Kg$

Exercice N°3: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 24-06-2004

1 ENONCE

Un pipe-line de diamètre d=25 cm est de longueur L est destiné à acheminer du pétrole brut d'une station A vers une station B avec un débit massique q_m=18kg/s.



Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes:

- masse volumique ρ =900 kg/m3,
- viscosité dynamique μ=0,261Pa.s.

On suppose que le pipe-line est horizontal.

1) Calculer le débit volumique q_v du pétrole.

2) Déterminer sa vitesse d'écoulement V.

3) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

4) Quelle est la nature de l'écoulement?

5) Calculer la valeur du coefficient de perte de charge linéaire λ.

6) Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B.

Préciser les conditions d'application et simplifier.

7) Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B à partir de laquelle la chutte de pression (P_A-P_B) dépasse 3 bar.

2 REPONSE

1) Débit volumique : $q_V = \frac{q_m}{\rho}$ A.N. $q_V = \frac{18}{900} = 0{,}02\ m^3/s$

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_V}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.0{,}02}{\pi.0{,}25^2} = 0{,}407\ m/s$

3) Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{V.d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}$ A.N. $R_e = \frac{0{,}407.0{,}25}{\left(\frac{0{,}267}{900}\right)} = 350{,}862$

4) $R_e < 2000$ **:** il s'agit d'un écoulement laminaire.

5) Coefficient de perte de charge linéaire : $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$ A.N. $\lambda = \frac{64}{350{,}862} = 0{,}1824$

6) Equation de Bernoulli : $\frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) + \frac{1}{\rho}.(P_B - P_A) + g.(Z_B - Z_A) = J_L$

Conditions d'application : $V_B = V_A$, $Z_B = Z_A$

Equation de Bernoulli simplifié : $\frac{1}{\rho}.(P_B - P_A) = J_L$

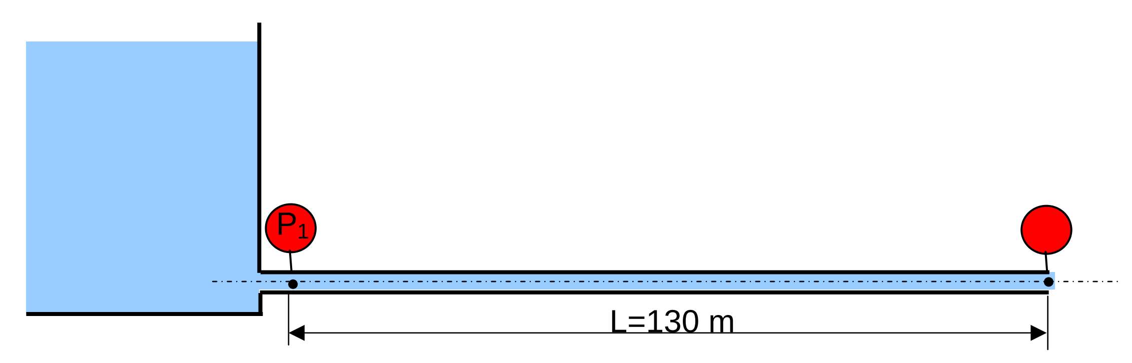
7) Calcul de la longueur de la conduite : $\frac{1}{\rho}.(P_B - P_A) = J_L$ avec $J_L = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)$

Donc $L = \frac{2.(P_A - P_B).d}{\lambda.\rho.V^2}$ A.N. $L = \frac{2.3.10^5}{0{,}1824.900.0{,}407^2}.0{,}25 = 5516{,}137\ m$

Exercice N°4: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 18-06-2007

1 ENONCE

Un fluide de masse volumique ρ = 961 kg/m ^{3} à une vitesse V=1,5 m/s dans une conduite horizontale de diamètre d = 120 mm à partir d' un réservoir de très grande section ouvert à l' air libre.



Sur la partie horizontale de ce tube sont installés deux manomètres distants de L = 130 m. On relève une chute de pression $\Delta P = P_1 - P_2 = 1{,}5\ bar$.

1) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la valeur du coefficient de pertes de charge linéaire λ en fonction de ΔP, ρ, L, d et V.

2) On suppose que l'écoulement est laminaire, Calculer le nombre de Reynolds en fonction de λ.

3) En déduire la viscosité cinématique du fluide.

2 REPONSE

1) Equation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = J_{12}$

or $V_1 = V_2$ et $Z_1 = Z_2$ et $J_{12} = J_L = -\frac{1}{2}\lambda.V^2.\left(\frac{L}{d}\right)$

Donc $\boxed{\lambda = \frac{2.\Delta P}{\rho.V^2}.\frac{d}{L}}$ A.N. $\boxed{\lambda = \frac{2.1{,}5.10^5}{961.1{,}5^2}.\frac{0{,}12}{130} = 0{,}128}$

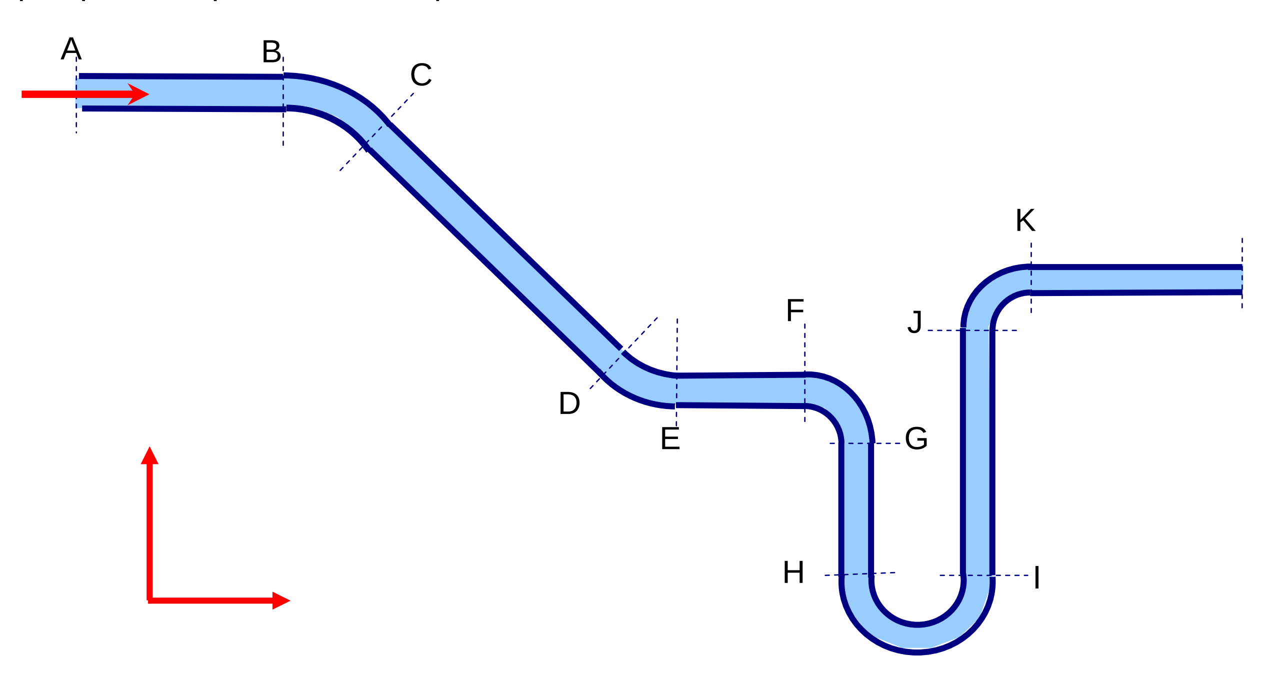
2) Loi de Poiseuille $\lambda = \frac{64}{R_e} \Rightarrow \boxed{R_e = \frac{64}{\lambda}}$ A.N. $\boxed{R_e = \frac{64}{0{,}128} = 500}$

3) $R_e = \frac{V.d}{\upsilon} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{V.d}{R_e}}$ A.N. $\boxed{\upsilon = \frac{0{,}15.0{,}12}{500} = 36.10^{-6}\ m^2/s}$

Exercice N°5: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 19-06-2002

1 ENONCE

De l'huile ayant une viscosité dynamique $\mu = 0{,}7\ Pa.s$ et une densité d=0,896 est pompée d'un point A vers un point L.



Elle circule dans une canalisation de diamètre d=100 mm formée des six tronçons rectilignes suivants:

- AB de longueur 6 m,
- CD de longueur 12 m,

- EF de longueur 5 m,
- GH de longueur 4 m,
- IJ de longueur 7 m,
- KI de longueur 8 m.

Le canalisation est équipée :

- de deux coudes à 45 ^{0} : BC, DE : ayant chacun un coefficient de perte de charge $K_{coude\ 45}$=0,2,
- de deux coudes à 90^0 : FG et JK : ayant chacun un coefficient de perte de charge $K_{coude\ 90}$=0,3,
- d'un coude à 180^0 HI: ayant un coefficient de perte de charge $K_{coude\ 180}$=0,4,

La pression d'entrée est P_A=3 bars.

La conduite est supposée horizontale et transporte un débit volumique qv=2.5 l/s.

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse d'écoulement V en m/s.

2) Calculer le nombre de Reynolds.

3) Il s'agit d'un écoulement laminaire ou turbulent ?

4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire λ.

5) Calculer les pertes de charges linéaires $\Delta P_{lineaire}$.

6) Calculer les pertes de charges singulières $\Delta P_{\sin guliere}$.

7) Déterminer la pression de sortie P_L.

8) Quelle sera la pression de sortie P_L' si le débit volumique Q_v atteint 5 L/s.

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement V : $V = \frac{4.Q_V}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.2,5.10^{-3}}{\pi.0,1^2} = 0,318\ m/s$

2) Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{V.d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}$ A.N. $R_e = \frac{0,318.0,1}{\left(\frac{0,7}{896}\right)} = 40,7$

3) $R_e < 2000$: il s'agit d'un écoulement laminaire.

4) Formule de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$ A.N. $\lambda = \frac{64}{40,7} = 1,57$

5) $\Delta P_{linéaire} = -\lambda.\rho.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)$ A.N. $\Delta P_{linéaire} = -1,57.896.\frac{0,318^2}{2}.\left(\frac{42}{0,1}\right) = -29873,16\ Pa$

6) $\Delta P_{singulière} = -K_s.\rho.\frac{V^2}{2}$ A.N. $\Delta P_{singulière} = -(2.0,2+2.0,3+0,4).896.\frac{0,318^2}{2} = -63,42\ Pa$

7) Pression de sortie P_L :

$P_L = P_A + \Delta P_{linéaire} + \Delta P_{singulière}$ A.N. $P_L = 8 - 0,29873 - 0,00063 = 7,7\ bar$

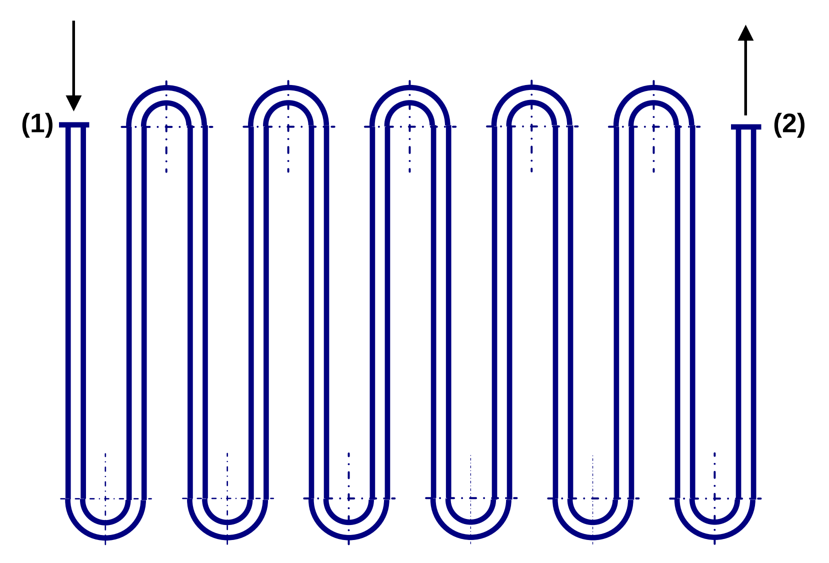
8) $P_L' = P_A - 4.(0,29873 + 0,00063)$ A.N. $P_L = 8 - 4.(0,29873 - 0,00063) = 6,8\ bar$

Commentaire : *Dans cet exercice, la perte de charge singulière ne dépasse même pas 1 % par rapport à la perte de charge linéaire. Son effet est négligeable sur le résultat de la pression de sortie.*

Exercice N°6: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 15-01-2004

1 ENONCE

Un liquide de refroidissement circule dans un radiateur en forme de serpentin.



Le serpentin comprend les éléments suivants :

- 12 tubes rectilignes de diamètre d=10 mm et de longueur 1 m chacun.
- 11 coudes à 180^0 ayant chacun un coefficient de perte de charge K_S = 0,4,

La conduite transporte un débit volumique q_v=0,25 l/s. La pression en entrée est P_1= 3 bars.

On donne les caractéristiques du fluide de refroidissement:

- viscosité dynamique : $\mu = 10^{-3}$ Pa.s.
- masse volumique : $\rho = 1000$ kg/m³.

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse V d'écoulement du fluide dans la conduite en (m/s).

2) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

3) Préciser la nature de l'écoulement.

4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire λ, en précisant la formule utilisée.

5) Calculer les pertes de charges linéaires J_L en J/kg.

6) Calculer les pertes de charges singulières J_S en J/kg.

7) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2) pour déterminer la pression de sortie P_2.

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.0{,}25.10^{-3}}{\pi.0{,}01^2} = 3{,}18\ m/s$

2) Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{V.d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}$ A.N. $R_e = \frac{3{,}18.0{,}01}{\left(\frac{10^{-3}}{10^3}\right)} = 31800$

3) $2000 < R_e < 10^5$ **:** il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4) Formule de Blasius : $\lambda = 0{,}316.R_e^{-0{,}25}$ A.N. $\lambda = 0{,}316.31800^{-0{,}25} = 0{,}02366$

5) Pertes de charge linéaires $J_L = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)$

A.N. $J_L = -0{,}02366.\frac{3{,}18^2}{2}.\frac{12}{0{,}01} = -143{,}55\ J/kg$

6) Pertes de charge singulières : $J_S = -.K_s.\frac{V^2}{2}$

A.N. $J_S = -(0{,}3.11).\frac{3{,}18^2}{2} = -22{,}24\ J/kg$

7) Equation de Bernoulli : $\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(Z_2 - Z_1) = J_L + J_S$

Or $V_1=V_2$, $P_1=P_2=P_{atm}$

donc: $P_2 = P_1 + \rho.(J_L + J_S)$

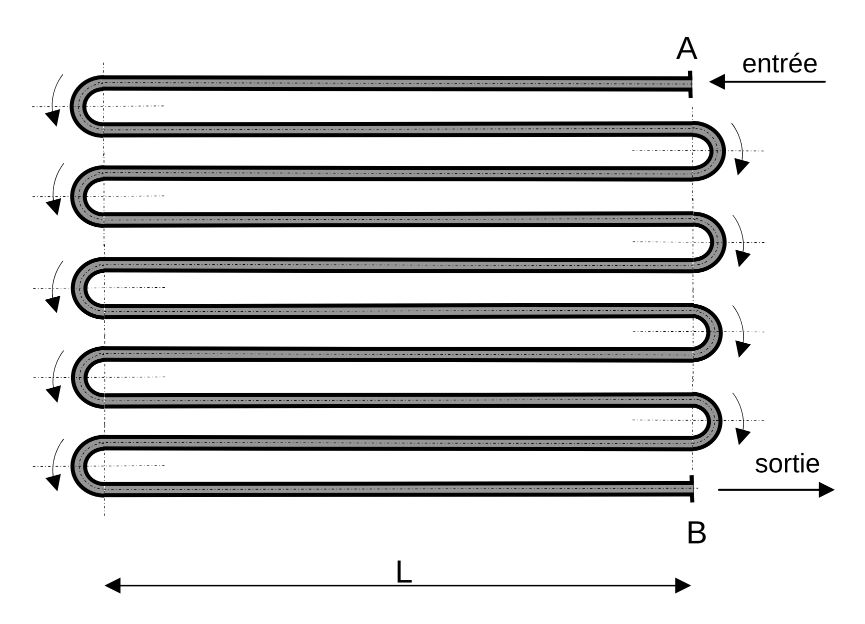
A.N. $P_2 = 3.10^5 - 1000.(143{,}55 + 22{,}24) = 134210\ Pa = 1{,}3421\, bar$

Commentaire : *La perte de charge singulière constitue une part non négligeable dans la perte de charge totale (13,4 %). Ce ci est dû au nombre important d'accidents de parcours (coudes).*

Exercice N°7: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 16-06-2008

1 ENONCE

La figure ci-dessous représente le serpentin d'un plancher chauffant à circulation d'eau utilisé dans une habitation. L'eau chaude utilisée, serpente dans le plancher pour chauffer la surface du sol.



Une pompe de circulation de débit volumique q_v=0,236 L/s, non représentée dans la schéma, permet de refouler l'eau chaude qui rentre par la section A ou la pression est P_A=8 bar, circule dans le serpentin en passant par 10 tronçons de tubes rectilignes de section circulaire, de diamètre intérieur d=10 mm, de longueur L= 6 m chacun, reliés entre eux par 9 coudes à 180°, pour enfin sortir par le point B ou la pression de l'eau chute à cause des pertes de charge pour atteindre une pression P_B qu'on veut déterminer.

On donne :

- la viscosité cinématique de l'eau chaude $\nu=0{,}75.10^{-6}$ m^2/s.

- le coefficient de perte de charge singulière K_S=0,148 pour un coude à 180°.

Travail demandé :

1) Déterminer la vitesse d'écoulement V de l'eau dans le serpentin.

2) Calculer le nombre de Reynolds Re.

3) En déduire la nature de l'écoulement.

4) Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire λ.

5) Calculer la perte de charge singulière J_S totale due aux 9 coudes.

6) Calculer la perte de charge linéaire J_L totale due aux 10 tronçons rectilignes.

7) En déduire la perte de charge totale J_{AB} du serpentin.

8) En appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections A et B, exprimer puis calculer la pression de sortie P_B en fonction de P_A, ρ et J_{AB}.

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement : $V_2 = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}$ A.N. $V_2 = \frac{4.0,236.10^{-3}}{\pi.0,01^2} = 3\ m/s$

2) Nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \frac{V.d}{\nu}$ A.N : $\mathrm{Re} = \frac{3.0,01}{0,75.10^{-6}} = 40000$

3) $2000 < \mathrm{Re} < 100000$ donc il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4) Formule de Blasius $\lambda = 0,316.\mathrm{Re}^{-0,25}$ A.N. $\lambda = 0,316.40000^{-0,25} = 0,022$

5) Perte de charge singulière : $J_S = -(9K_s).\left(\frac{V^2}{2}\right)$

A.N. $J_S = -(9.0,149).\left(\frac{3^2}{2}\right) = -6\ J/kg$

6) Perte de charge linéaire: $J_L = -\lambda.\left(\frac{10L}{d}\right).\left(\frac{V^2}{2}\right)$

A.N. $J_L = -0,022.\left(\frac{10.6}{0,01}\right).\left(\frac{3^2}{2}\right) = -594\ J/kg$

7) Perte de charge totale : $J_{AB} = J_s + J_L$ A.N. $J_{AB} = -6 - 594 = -600\ J/kg$

8) Eq. de Bernoulli : $\frac{V_B^2 - V_A^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho} + g(Z_B - Z_A) = J_{AB}$ or V_A=V_B=V et Z_A =Z_B

Donc $P_B = P_A + \rho . J_{AB}$ A.N. $P_B = 8.10^5 - 1000.600 = 2.10^5 = 2\ bar$

Exercice N°8: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 04-01-2008

1 ENONCE

Une pompe à essence de rendement η=67,4% et de débit volumique q_v=0,629 L/s assure, le remplissage d'un réservoir d'automobile.

La pompe aspire l'essence de masse volumique ρ=750kg/m^3 à partir d'une grande citerne dont la surface libre située à une altitude Z_1 et une pression P_1=P_{atm}=1 bar.

On suppose que le niveau d'essence dans la citerne varie lentement ($V_1 \approx 0$)

La pompe refoule l'essence, à une altitude Z_2, sous forme d'un jet cylindrique, en contact avec l'atmosphère à une pression P_2=P_{atm}=1 bar, se déversant dans le réservoir de l'automobile à une vitesse V_2.

La différence des cotes entre la section de sortie de la conduite et la surface libre de la citerne est H=Z_2-Z_1=2m.

La conduite a une longueur L=3,32 m et un diamètre d=2 cm.

La viscosité dynamique de l'essence est μ =0,0006 Pa.s.

L'accélération de la pesanteur est g=9,8 m/s^2.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement V_2 de l'essence dans la conduite.

2) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

3) Déterminer la nature de l'écoulement.

4) Calculer le coefficient de perte de charge linéaire λ.

5) En déduire la perte de charge linéaire J_{12}.

6) Appliquer le théorème de Bernoulli généralisé.

Et calculer la puissance P_a sur l'arbre de la pompe.

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement : $V_2 = \dfrac{4.q_v}{\pi . d^2}$

A.N. $V_2 = \dfrac{4.0{,}629.10^{-3}}{\pi . 0{,}02^2} = 2\ m/s$

2) Nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \dfrac{V.d}{\left(\dfrac{\mu}{\rho}\right)}$

A.N : $\mathrm{Re} = \dfrac{2.0{,}02}{\left(\dfrac{0{,}0006}{750}\right)} = 50000$

3) $2000 < \mathrm{Re} < 100000$ donc il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4) Formule de Blasius $\lambda = 0{,}316.\mathrm{Re}^{-0{,}25}$

A.N. $\lambda = 0{,}316.50000^{-0{,}25} = 0{,}0211$

5) Perte de charge linéaire : $J_{12} = -\lambda.\left(\dfrac{L}{d}\right).\left(\dfrac{V^2}{2}\right)$

A.N. $J_{12} = -0{,}0211.\left(\dfrac{3{,}32}{0{,}02}\right).\left(\dfrac{2^2}{2}\right) = -7\ J/kg$

6) Eqution de Bernoulli : $\dfrac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \dfrac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = J_{12} + \dfrac{\eta.P_a}{q_m}$

or V_1=0 et Z_2 –Z_1=H

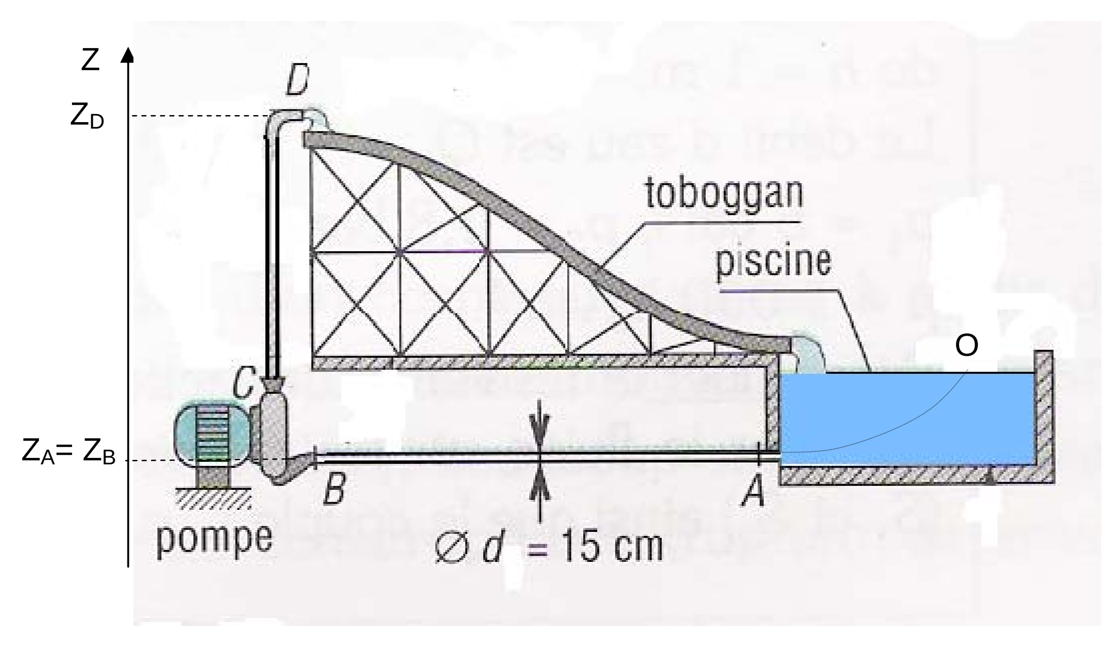
Donc $P_a = \dfrac{\rho.q_v}{\eta}\left(\dfrac{V_2^2}{2} + g.H - J_{12}\right)$

A.N. $P_a = \dfrac{750.0{,}629.10^{-3}}{0{,}674}\left(\dfrac{2^2}{2} + 9{,}8.2 + 7\right) = 20\ w$

Exercice N°9: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 19-06-2006

1 ENONCE

La figure suivante représente une installation utilisée dans un parc d'attraction.



L'installation est composée:

- d'une conduite d'aspiration AB horizontale de diamètre d = 15 cm et de longueur L_1 = AB = 10 m.
- d'une pompe centrifuge ayant un rendement η = 0,8 qui aspire l'eau à un débit volumique Q_v= 10,6 L/s depuis une piscine et la refoule en D, vers un toboggan.
- d'une conduite de refoulement CD verticale de diamètre d = 15 cm et de longueur L_2 =CD= 8 m.
- d'un toboggan formant un canal descendant permettant d'acheminer par gravité l'eau vers la piscine.

L'eau reste en circuit fermé : piscine, tube AB, pompe, tube CD, toboggan, piscine. …etc.

On donne :

- la masse volumique de l'eau : $\rho = 1000\ kg/m^3$,
- la viscosité dynamique de l'eau : $\mu = 10^{-3}$ Pa.s,
- l'accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\ m/s^2$.
- La pression $P_O = P_D = P_{atm}$= 1 bar,
- Z_O = 1,5 m (O est un point de la surface libre de l'eau dans la piscine).
- $Z_A = Z_B = 0$.
- Z_C= 0,3 m.
- Z_D= 8,3 m

On suppose que toutes les pertes de charge singulières sont négligeables.

1) Calculer la vitesse d'écoulement V dans la conduite.

2) En appliquant le Théorème de Bernoulli entre un point O de la surface libre de la piscine et le point A, calculer la pression P_A.

On suppose que le niveau de l'eau dans la piscine reste constant (V_O =0).

3) Déterminer le nombre de Reynolds $\mathbf{R_e}$ dans la conduite.

4) En déduire la nature de l'écoulement.

5) Calculer le coefficient de perte de charge linéaire λ.

6) Déterminer la perte de charge linéaire J_L entre A et D.

7) En appliquant le théorème de Bernoulli entre A et D, déterminer la puissance nette P_n développée par la pompe.

8) En déduire la puissance $\mathbf{P_a}$ absorbée par la pompe.

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement $\boxed{V=\frac{4.Q_v}{\pi.d^2}}$ A.N. $\boxed{V=\frac{4.10{,}6.10^{-3}}{\pi.0{,}15^2}=0{,}6\ m/s}$.

2) Théorème de Bernoulli entre O et A : $\frac{V_O^2-V_A^2}{2}+\frac{P_O-P_A}{\rho}+g.(Z_O-Z_A)=0$

Or V_O= 0 et P_O = P_{atm} = 1 bar , donc $\boxed{P_A=P_O+\rho.g.(Z_O-Z_A)-\frac{1}{2}.\rho.V_A^2}$

A.N. $\boxed{P_A=10^5+1000.9{,}81.(1{,}5-0)-\frac{1}{2}.1000.0{,}6^2=114535\ Pa=1{,}14535\ bar}$

3) Nombre de Reynolds $\boxed{R_e=\frac{\rho.V.d}{\mu}}$ A.N. $\boxed{R_e=\frac{1000.0{,}6.0{,}15}{10^{-3}}=90000}$.

4) $2000<R_e<100000$ donc l'écoulement est **turbulent lisse**.

5) Coefficient de perte de charge linéaire $\boxed{\lambda=0{,}316.R_e^{-0{,}25}}$

A.N. $\boxed{\lambda=0{,}316.90000^{-0{,}25}=0{,}01824}$

6) Perte de charge linéaire $\boxed{J_L=-\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)}$

A.N. $\boxed{J_L=-0{,}01824.\frac{0{,}6^2}{2}.\left(\frac{10+8}{0{,}15}\right)=-0{,}4\ J/kg}$

7) Théorème de Bernoulli entre A et D : $\frac{V_D^2 - V_A^2}{2} + \frac{P_D - P_A}{\rho} + g.(Z_D - Z_A) = J_L + \frac{P_n}{\rho.Q_v}$,

Or $V_A = V_D$, $P_D = P_{atm}$ et $Z_A = 0$ donc $\boxed{P_n = \rho.Q_v.\left(g.Z_D + \frac{P_{atm} - P_A}{\rho} - J_L\right)}$

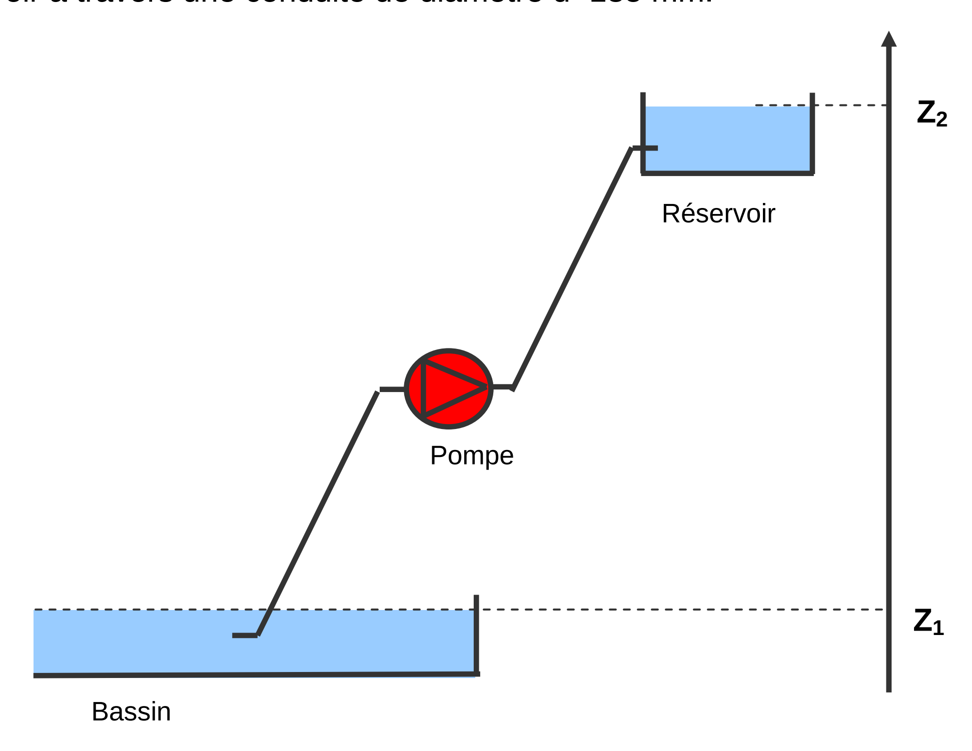
A.N. $\boxed{P_n = 1000.10{,}6.10^{-3}.\left(9{,}81.8{,}3 + \frac{10^5 - 1{,}1452.10^5}{1000} + 0{,}4\right) = 713{,}411\ w}$

8) Puissance absorbée par la pompe $\boxed{P_a = \frac{P_n}{\eta}}$ A.N. $\boxed{P_a = \frac{713{,}411}{0{,}8} = 891{,}763\ w}$

Exercice N°10:

1 ENONCE

Une pompe de débit volumique q_v= 2,8 L/s remonte de l'eau entre un bassin et un réservoir à travers une conduite de diamètre d=135 mm.



On donne :

- $Z_1 = 0$; $Z_2 = 35$ m
- $P_1 = P_2 = 1013$ mbar
- viscosité dynamique de l'eau : $\mu = 1.10^{-3}$ Pa·s.

- longueur de la conduite L=65 m

On négligera toutes les pertes de charge singulières.

1) Calculer la vitesse d'écoulement V de l'eau dans la conduite.

2) Calculer le nombre de Reynolds. L'écoulement est laminaire ou turbulent ?

3) Calculer le coefficient de pertes de charge linéaire. En déduire les pertes de charges J_{12} tout au long de la conduite.

4) Appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la puissance nette P_{net} de la pompe.

5) Le rendement de la pompe étant de 80 %, calculer la puissance absorbée par la pompe.

2 REPONSE

1) $V = \frac{q_v}{S} = 4.\frac{q_v}{\pi.d^2} = 0{,}2\ m/s$

2) $\Re = \frac{V.d}{\nu} = \frac{V.d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)} = 27000$;

$2000 < \Re < 10^5$ il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

3) On applique la formule de Blasius : $\lambda = 0{,}316.\Re^{-0{,}25} = 0{,}025$

La perte de charge linéaire est : $J_{12} = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right) = -0{,}24\ J/kg$

4) On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre les points (1) et (2):

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(Z_2 - Z_1) = J_{12} + \frac{P_{net}}{\rho.q_V}$$

$V_2=V_1$, $P_2=P_1$ donc $P_{net} = \rho.q_v.(g(Z_2 - Z_1) - J_{12}) = 962\ w$

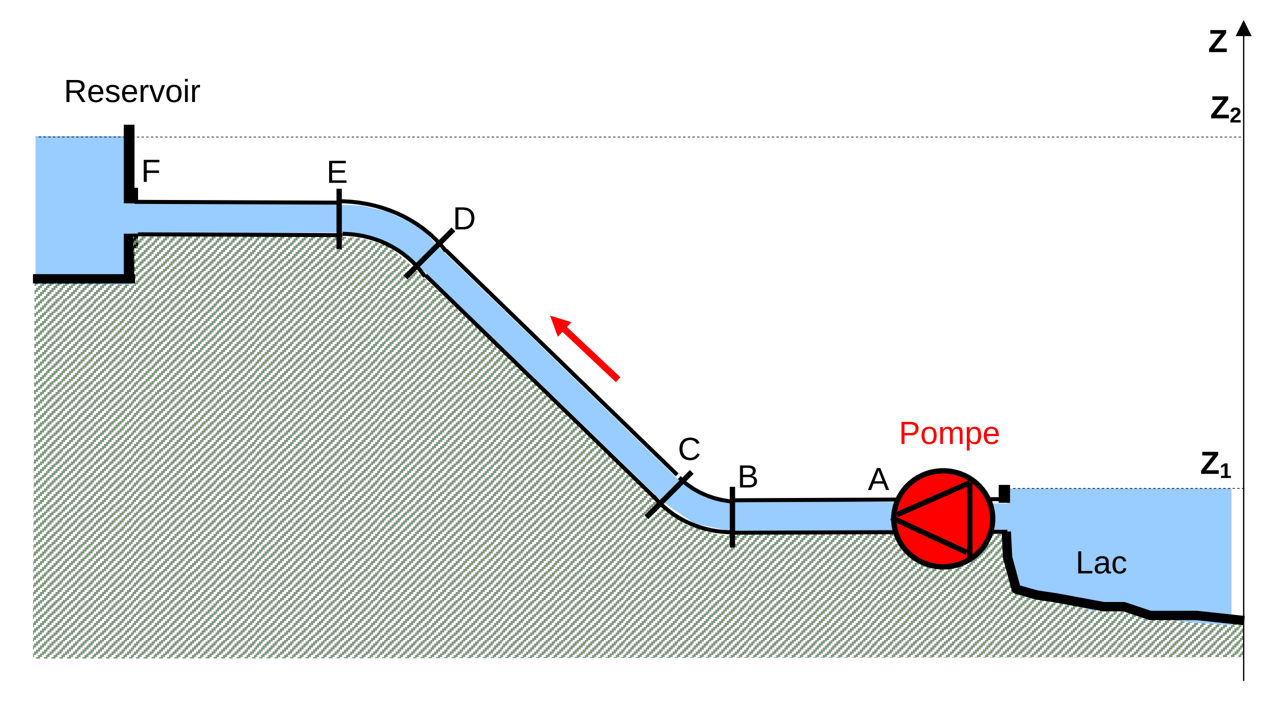
5) $P_a = \frac{P_{net}}{\eta} = 1202\ w$

Commentaire : *Nous avons négligé dans cet exercice les pertes de charges singulières. La prise en compte de ces pertes de charge va induire une augmentation de la puissance de pompage.*

Exercice N°11: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 06-02-2003

1 ENONCE

Une pompe de débit volumique q_v=2 l/s et de rendement η=70 % remonte de l'eau à partir d'un lac jusqu'au réservoir situé sur une colline.



L'eau est acheminée dans une conduite de diamètre d=130 mm formée de trois tronçons rectilignes :

- AB de longueur L_1= 10 m,
- CD de longueur L_2= 12 m,
- EF de longueur L_3= 8 m,

Et de deux coudes à 45 ^{0} : BC et DE : ayant chacun un coefficient de perte de charge K_s=0,33.

On suppose que :

- les niveaux d'eau varient lentement,
- les niveaux Z_1=0 m , Z_2= 10 m,
- les pressions $P_1=P_2=P_{atm}$;
- la viscosité dynamique de l'eau : $\mu=10^{-3}$ Pa.s,
- la masse volumique de l'eau : ρ=1000 kg/m^3,
- l'accélération de la pesanteur : g=9,81 m/s^2.

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse V d'écoulement d'eau dans la conduite en m/s.

2) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

3) Préciser la nature de l'écoulement.

4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire λ, en précisant la formule utilisée.

5) Calculer les pertes de charges linéaires $J_{linéaire}$ en J/kg.

6) Calculer les pertes de charges singulières $J_{singulière}$ en J/kg.

7) Déterminer la puissance nette P_n de la pompe en Watt.

8) En déduire la puissance P_a absorbée par la pompe.

2 REPONSE

1) $V = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.2.10^{-3}}{\pi.0{,}13^2} = 0{,}15\ m/s$

2) $R_e = \frac{V.d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}$ A.N $R_e = \frac{0{,}15.0{,}13}{\left(\frac{10^{-3}}{10^3}\right)} = 19500$

3) $2000 < R_e < 10^5$: il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4) Formule de Blench : $\lambda = 0{,}316.R_e^{-0{,}25}$ A.N. $\lambda = 0{,}316.19500^{-0{,}25} = 0{,}02674$

5) Perte de charge linéaire : $J_{linaire} = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{d}\right)$

A.N. $J_{linaire} = -0{,}02674.\frac{0{,}15^2}{2}.\frac{10+12+8}{0{,}13} = -0{,}09256\ J/kg$

6) Perte de charge singulière : $J_{singuliere} = -2.K_s.\frac{V^2}{2}$

A.N. $J_{singuliere} = -2.0{,}33.\frac{0{,}15^2}{2} = -0{,}00742$

7) Equation de Bernoulli : $\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(Z_2 - Z_1) = \frac{P_n}{\rho.q_v} + J_{12}$

Or $V_1=V_2$, $P_1=P_2=P_{atm}$ et $J_{12} = J_{linéaire} + J_{singulière}$

donc : $P_n = \rho.q_v.\left[g.(Z_2 - Z_1) - (J_{linire} + J_{singuliere})\right]$

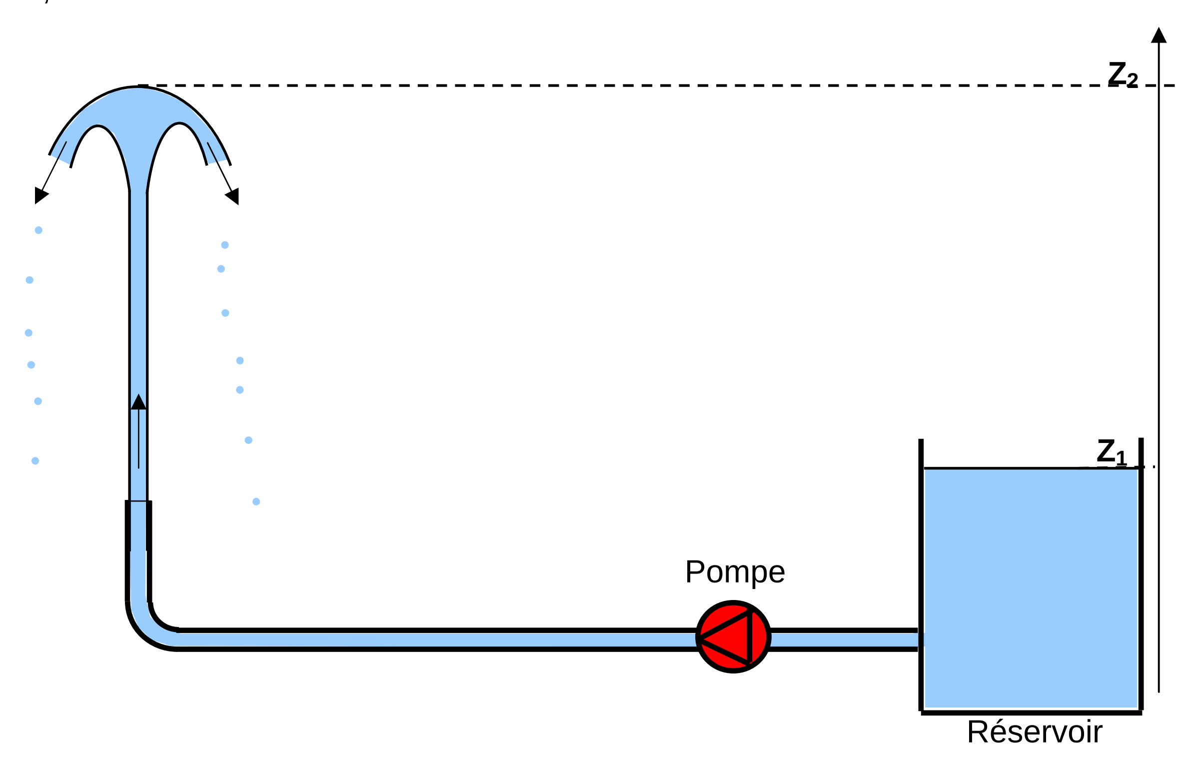
A.N. $P_n = 1000.2.10^{-3}.[9{,}81.(10-0)+0{,}1] = 196{,}4\ w$

8) $P_a = \dfrac{P_n}{\eta}$ A.N. $P_a = \dfrac{196{,}4}{0{,}7} = 280{,}57\ w$

Exercice N°12: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 23-06-2003

1 ENONCE

On alimente un jet d'eau à partir d'un réservoir au moyen d'une pompe de débit volumique q_V= 2 L/s et d'un tuyau de longueur L= 15 m et de diamètre d= 30 mm. Le tuyau comporte un coude à 90° ayant un coefficient de pertes de charge K_S= 0,3.



Le niveau de la surface libre du réservoir, supposé lentement variable, est à une altitude Z_1 = 3 m au dessus du sol.

Le jet s'élève jusqu'à une hauteur Z_2 = 10 m.

On suppose que:

- Les pressions: $P_1=P_2=P_{atm}$.
- la viscosité dynamique de l'eau: $\mu=10^{-3}$ Pa.s.
- la masse volumique de l'eau: $\rho=1000$ kg/m^3.
- l'accélération de la pesanteur: g=9,81 m/s^2.

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse V d'écoulement d'eau dans la conduite en m/s.

2) Calculer le nombre de Reynolds R_e.

3) Préciser la nature de l'écoulement.

4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire λ, en précisant la formule utilisée.

5) Calculer les pertes de charges linéaires $J_{linéaire}$ en J/kg.

6) Calculer les pertes de charges singulières $J_{singulière}$ en J/kg.

7) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2) pour déterminer la puissance nette P_n de la pompe en Watt.

8) En déduire la puissance P_a absorbée par la pompe sachant que son rendement est $\eta = 75\ \%$

2 REPONSE

1) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}$ A.N. $V = \frac{4.2.10^{-3}}{\pi.0{,}03^2} = 2{,}83\ m/s$

2) Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{V.d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}$ A.N. $R_e = \frac{2{,}83.0{,}03}{\left(\frac{10^{-3}}{10^3}\right)} = 84900$

3) $2000 < R_e < 10^5$: il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4) Formule de Blasius : $\lambda = 0{,}316.R_e^{-0{,}25}$ A.N. $\lambda = 0{,}316.84900^{-0{,}25} = 0{,}018$

5) Perte de charge linéaire :

$J_{linaire} = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)$ A.N. $J_{linéaire} = -0{,}0185.\frac{2{,}83^2}{2}.\frac{15}{0{,}03} = -37\ J/kg$

6) Perte de charge singulière:

$J_{singuliere} = -.K_s.\frac{V^2}{2}$ A.N. $J_{singuliere} = -0{,}3.\frac{2{,}83^2}{2} = -1{,}2\ J/kg$

7) Equation de Bernoulli :

$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{\rho}.(P_2 - P_1) + g.(Z_2 - Z_1) = \frac{P_n}{\rho.q_v} + J_{lineaire} + J_{singuliere}$ Or $V_1=V_2$, $P_1=P_2=P_{atm}$

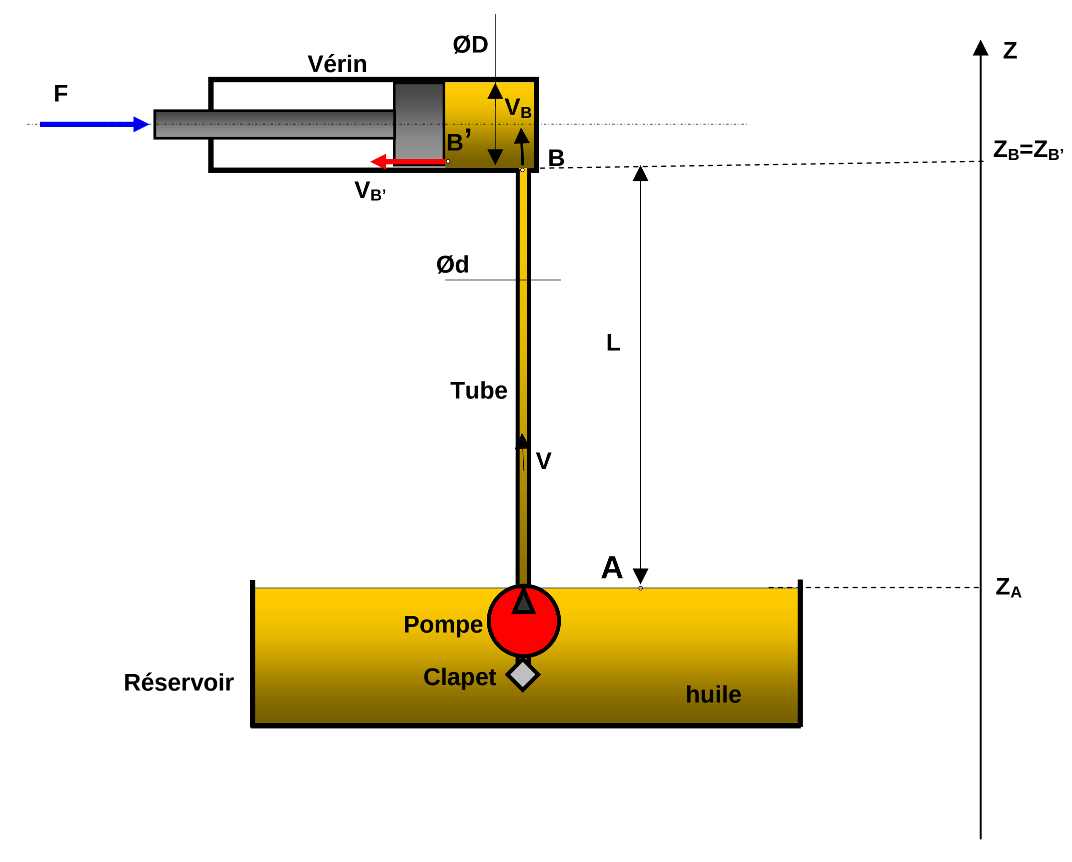
Donc : $P_n = \rho.q_v.\left[g.(Z_2 - Z_1) - (J_{linéaire} + J_{singuliere})\right]$

A.N. $P_n = 1000.2.10^{-3}.[9{,}81.(10-3)+37+1{,}2] = 213{,}74\ w$

8) Puissance absorbée par la pompe : $P_a = \frac{P_n}{\eta}$ A.N. $P_a = \frac{213{,}74}{0{,}75} = 285\ w$

Exercice N°13: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 20-06-2005

1 ENONCE



Le schéma proposé ci-dessus représente une installation hydraulique composée :

- d'un réservoir contenant de l'huile de masse volumique ρ= 900 kg/m^3 et de viscosité cinématique $\nu = 25.10^{-6}\ m^2/s$,
- d'une pompe de débit volumique q_V=16 L/mn
- d'un tube vertical de longueur L = 50 cm et de diamètre d = 5 mm permettant d'acheminer de l'huile sous pression refoulée par la pompe,
- d'un vérin à simple effet horizontal équipé d'un piston qui se déplace en translation sous l'effet la pression d'huile dans une chemise,
- d'un clapet d'aspiration anti-retour placé en amont de la pompe qui a un coefficient de perte de charge singulière K_S= 0,45.

Partie 1 : Etude du vérin.

On néglige dans cette partie toutes les pertes de charges.

1) A partir du débit de la pompe, calculer la vitesse d'écoulement V_B dans la conduite.

2) De même, déterminer la vitesse $V_{B'}$ de déplacement du piston sachant que son diamètre D = 10 cm.

3) Le piston est soumis à une force de compression F=6151 N qui s'oppose à son déplacement. Calculer la pression d'huile $P_{B'}$ au point B'.

4) En appliquant le théorème de Bernoulli entre B' et B. Calculer la pression d'admission P_B dans le vérin. On suppose que $Z_{B'}=Z_B$.

Partie 2 : Etude du circuit d'alimentation (clapet, pompe et tube).

On prendra en considération dans cette partie toutes les pertes de charges.

1) Calculer le débit massique q_m de la pompe.

2) Calculer le nombre de Reynolds Re.

3) Préciser la nature de l'écoulement.

4) Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire λ.

5) En déduire la perte de charge linéaire J_L.

6) Calculer la perte de charge singulière J_S due au clapet d'aspiration.

7) En appliquant le théorème de Bernoulli généralisé entre B et A, déterminer la puissance nette P_n de la pompe.

On suppose que :

- le niveau dans le réservoir varie lentement ($V_A \approx 0$),
- la pression $P_A = P_{atm} = 1$ bar,
- l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s^2.

2 REPONSE

Partie 1 :

1) Vitesse d'écoulement : $V_B = \dfrac{4.q_V}{\pi.d^2}$ A.N. $V_B = \dfrac{4.16}{\pi.0{,}005^2.60.1000} = 13{,}581\, m/s$

2) Vitesse de déplacement du piston : $V_{B'} = \dfrac{4.q_V}{\pi.D^2}$

A.N. $V_{B'} = \frac{4.16}{\pi.0,1^2.60.1000} = 0,0339\ m/s$

3) Pression sur le piston : $P_{B'} = \frac{4.F}{\pi.D^2}$ A.N. $P_{B'} = \frac{4.6151}{\pi.0,1^2} = 783169,64 \quad Pa$

4) Equation de Bernoulli : $\frac{V_{B'}{}^2 - V_B^2}{2} + \frac{P_{B'} - P_B}{\rho} + g(Z_{B'} - Z_B) = 0$

Or $Z_{B'}=Z_B$

donc $P_B = P_{B'} + \frac{1}{2}.\rho.(V_{B'}^2 - V_B^2)$

A.N. $P_B = 783169,64 + \frac{1}{2}900(0,0339^2 - 13,581^2) = 700170,55\ Pa$

Partie 2 :

1) Débit massique : $q_m = \rho.q_V$ A.N. $q_m = 900.\frac{16}{1000.60} = 0,24\ kg/s$

2) Nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \frac{V.d}{\upsilon}$ A.N. $\mathrm{Re} = \frac{13,581.0,005}{25.10^{-6}} = 2716,2$

3) 2000<Re<10000 donc l'écoulement est turbulent lisse.

4) Coefficient de perte de charge linéaire : $\lambda = 0,316.\mathrm{Re}^{-0,25}$

A.N. $\lambda = 0,316 * 2716,2^{-O,25} = 0,0437$

5) Perte de charge linéaire : $J_L = -\lambda.\frac{V^2}{2}.\left(\frac{L}{d}\right)$

A.N. $J_L = -0,0437.\frac{13,581^2}{2}.\frac{0,5}{0,005} = -403\ J/Kg$

6) Perte de charge singulière : $J_S = -K_S.\frac{V^2}{2}$

A.N. $J_S = -0,45.\frac{13,581^2}{2} = -41,5\ J/Kg$

7) Equation de Bernoulli $\frac{V_B^2 - V_A^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho} + g.(Z_B - Z_A) = (J_S + J_L) + \frac{P_n}{q_m}$

Or V_A=0 ; Z_B-Z_A=L Donc $$P_n = q_m.\left[\frac{V^2}{2} + \frac{P_B - P_A}{\rho} + g.L - (J_S + J_L)\right]$$

A.N. $$P_n = 0{,}24.\left[\frac{13{,}581^2}{2} + \frac{7.10^5 - 10^5}{900} + 9{,}81.0{,}5 + (41{,}5 + 403)\right] = 290\ w$$

Chapitre 5 : DYNAMIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

1 INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre, nous abordons les ***fluides compressibles*** qui présentent certaines particularités. La masse volumique d'un gaz varie avec sa pression. L'étude de l'écoulement d'un fluide compressible devient plus compliquée que celle d'un fluide incompressible. En effet, les variations de température ou de pression qui peuvent apparaître dans l'écoulement d'un liquide ne modifient en rien les volumes mis en jeu car la dilatation ou la compression sont généralement négligeables. En revanche, ces phénomènes prennent une grande importance lorsqu'il s'agit de vapeurs ou de gaz.

L'étude de l'écoulement des fluides compressible ne peut être abordée sans avoir fixé au préalable un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (nature du gaz : parfait, type d'évolution : isotherme ou adiabatique,…etc).

2 EQUATIONS D'ETAT D'UN GAZ PARFAIT

2.1 Lois des gaz parfaits

$\boxed{\frac{P}{\rho} = r.T}$ avec :

- P : pression.
- ρ : masse volumique en (kg/m^3).
- r : constante des gaz parfait ($r = \frac{R}{M} = 287\ J/Kg.^0K$).
- T : température en (^{0}K).

2.2 Transformations thermodynamiques

- Transformation à pression constante :

La chaleur récupérée par un gaz parfait à pression constante est :

$\boxed{\Delta H = C_p.\Delta T}$

avec :

- ΔH : variation d'enthalpie par unité de masse en (KJ/Kg)
- C_p : chaleur spécifique à pression constante en (KJ/Kg.^{o}K)
- ΔT : variation de température (^{0}K)
- Transformation à volume constant :

La chaleur récupérée par un gaz parfait à volume constant est :

$$\boxed{\Delta U = C_v.\Delta T}$$

avec :

- ΔU : variation d'énergie interne par unité de masse en (KJ/Kg)
- C_v : chaleur spécifique à volume constant en (KJ/Kg.^{o}K)
- ΔT : variation de température en (^{0}K)

Remarque :

$H = U + \frac{P}{\rho}$ équivaut à $\Delta H = \Delta(U + \frac{P}{\rho}) = \Delta U + \Delta(rT) = (C_v + r).\Delta T = C_p.\Delta T$

Donc : $\boxed{C_p = C_v + r}$: Relation de Mayer

On définie : $\boxed{\gamma = \frac{C_p}{C_v}}$

Exemple :

- Pour un gaz parfait monoatomique : $C_p = \frac{5}{2}.r$ et $C_v = \frac{3}{2}.r$ donc $\gamma = \frac{5}{3}$
- Pour un gaz parfait diatomique : $C_p = \frac{7}{2}.r$ et $C_v = \frac{5}{2}.r$ donc $\gamma = \frac{7}{5}$

or $C_p = C_V + r$ donc $C_p = \frac{C_p}{\gamma} + r$

ou encore : $\boxed{C_p = r.\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

La variation d'enthalpie est par conséquent : $\Delta H = C_p.\Delta T = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right).\Delta\left(\frac{P}{\rho}\right)$

ou encore $\boxed{H = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{P}{\rho}}$ *

- <u>Transformation adiabatique :</u>

$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = Cte$, D'après la lois des gaz parfaits : $\frac{P}{\left(\frac{P}{rT}\right)^{\gamma}} = Cte$ donc $\frac{P^{\gamma-1}}{T^{\gamma}} = Cte$

ou encore, $$\boxed{\frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = Cte}$$

3 CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS

3.1 Célérité du son

Pour un écoulement isentropique, la vitesse du son, appelée également célérité du son, est donnée par l'expression suivante :

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{\gamma.P}{\rho}} = \sqrt{\gamma.r.T}}$$

3.2 Nombre de Mach

On appelle nombre de ***Mach*** le rapport :

$$\boxed{M = \frac{V}{C}}$$

- V : Vitesse d'écoulement en (m/s)
- C : Célérité du son en (m/s)

Le nombre de Mach varie d'un point à l'autre de l'écoulement, non seulement parce que la vitesse varie, mais aussi parce que l'état du fluide varie, donc la célérité.

3.3 Ecoulement subsonique

L'écoulement est dit subsonique si la vitesse d'écoulement est inférieure à la vitesse du son. Ou encore : si ***M*** < 1

3.4 Ecoulement supersonique

L'écoulement est dit subsonique si la vitesse d'écoulement est supérieure à la vitesse du son. Ou encore : si ***M*** > 1

4 EQUATION DE CONTINUITE

L'équation de continuité d'un fluide compressible est :

$$\rho_1.S_1.V_1 = \rho_2.S_2.V_2$$

5 EQUATION DE SAINT-VENANT

L'équation de bilan énergétique d'un système ouvert est :

$$\Delta E_c + \Delta E_P + \Delta H = Q + W_u$$

où :

- ΔE_c : Variation d'énergie cinétique.
- ΔE_P : Variation d'énergie potentielle du fluide.
- ΔH : Variation d'enthalpie.
- Q: chaleur échangée avec le milieu extérieur.
- W_u : travail utile échangé.

Si on suppose :

- qu'il n'y pas d'échange de travail utile, Wu = 0
- que l'énergie potentielle est négligeable, $\Delta E_P = 0$
- que l'écoulement est adiabatique et réversible, Q=0

L'équation de bilan énergétique devient : $\Delta H + \Delta E_c = 0$

ou encore $(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 0$

donc $H + \frac{1}{2}V^2 = Cte$

or d'après l'équation (*) $H = C_p.T = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{P}{\rho}$

D'où la relation de **Saint-Venant :**

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}.V^2 = Cte$$

Entre deux points d'un écoulement, cette relation s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}.\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) + \frac{1}{2}.\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 0$$

ou encore $\frac{\gamma}{\gamma-1}.\frac{P_1}{\rho_1}.\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}.\frac{P_2}{P_1} - 1\right) + \frac{1}{2}.\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 0$

Or pour un gaz parfait $\frac{P_1}{\rho_1^{\gamma}} = \frac{P_2}{\rho_2^{\gamma}} = Cte$ donc $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

Donc

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{P_1}{\rho_1}.\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + \frac{1}{2}.\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 0$$

6 ETAT GENERATEUR :

C'est l'état d'un fluide en un point de l'écoulement où la vitesse V est supposée nulle.

On note par un indice i toutes les variables thermodynamiques relatives à ce point.

En appliquant le théorème de Saint-Venant entre ce point et un autre point on a :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}.V^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{P_i}{\rho_i}$$

Dans le cas d'un écoulement isentropique d'un gaz parfait, les caractéristiques thermodynamiques d'un point d'arrêt sont celles de l'état générateur c'est-à-dire : P_i, T_i, ρ_i.

Or la célérité du son est donnée par : $C = \sqrt{\frac{\gamma.P}{\rho}} = \sqrt{\gamma.r.T}$

Donc le théorème de Saint-Venant peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\gamma - 1}.C^2 + \frac{1}{2}.V^2 = \frac{1}{\gamma - 1}.C_i^2$$

En multipliant cette équation par $\frac{2}{C^2}$ on obtient : $\frac{2}{\gamma - 1} + M^2 = \frac{2}{\gamma - 1}.\left(\frac{C_i}{C}\right)^2$

Or $\left(\frac{C_i}{C}\right)^2 = \frac{T_i}{T}$

Donc la relation de Saint- Venant devient :

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2}.M^2 = \left(\frac{T_i}{T}\right)$$

De même, on peut écrire :

$$\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{\gamma-1}=1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2$$

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement :

- en (1) : $\frac{T_i}{T_1}=1+\frac{\gamma-1}{2}.\mathcal{M}_1^2$
- en (2) : $\frac{T_i}{T_2}=1+\frac{\gamma-1}{2}.\mathcal{M}_2^2$

Donc : $$\frac{T_2}{T_1}=\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}.\mathcal{M}_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}.\mathcal{M}_2^2}$$

De la même façon on peut établir des relations entre les pressions et les masses volumiques.

Remarque :

si M = 1 (v = c), l'état de l'écoulement est appelé état critique.

Il est déterminé en fonction de l'état générateur :

$$\frac{T_i}{T_c}=1+\frac{\gamma-1}{2}=\frac{1+\gamma}{2}$$

7 CONCLUSION

L'étude approfondie des écoulements des fluides compressibles ne peut se faire sans faire intervenir la thermodynamique. Les notions des mécanique des fluides abordées dans ce manuel ne constituent que des connaissance élémentaire nécessaire pour un technicien supérieur.

8 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice N°1:

1 ENONCE

Dans un écoulement d'air les caractéristiques en un point sont les suivantes :

- vitesse d'écoulement : V =100 m/s
- pression P = 1,013 bar
- température : T= 15°c ;
- Masse volumique ρ = 0,349 Kg/m^3
- γ = 1,4

On demande de calculer la pression d'arrêt P_i.

1) en négligeant la compressibilité de l'air.

2) en tenant compte de sa compressibilité.

2 REPONSE

1) En négligeant la compressibilité de l'air, on peut appliquer le théorème de Bernoulli : $\frac{V^2}{2}+\frac{P}{\rho}+g.Z=\frac{V_i^2}{2}+\frac{Pi}{\rho}+g.Z_i$ sachant que V_i=0 (point d'arrêt) et Z=Z_i

Donc $\boxed{P_i=P+\frac{1}{2}.\rho.V^2}$ Application numérique : $\boxed{P_i=1{,}O30\ bar}$

2) En prenant en compte la compressibilité, on doit appliquer le théorème de Saint-Venant : $\boxed{P_i=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.P}$ avec $C=\sqrt{\frac{\gamma.P}{\rho}}=\sqrt{1{,}4.\frac{1{,}013.10^5}{0{,}349}}=637{,}46\ m/s$

$M=\frac{V}{C}=\frac{100}{637{,}46}=0{,}156$ donc $\boxed{P_i=\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}.0{,}156^2\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}}.1{,}013=1{,}030\ bar}$

Exercice N°2:

1 ENONCE

Un avion vole à un nombre de Mach M= 0,95 et à une altitude où la pression atmosphérique est P_{atm} = 0,2332 bar et la masse volumique ρ = 0,349 Kg/m^3.

1) Calculer la vitesse de l'avion en Km/h.

2) Calculer la pression et la température du point d'arrêt sur le bord d'attaque de l'aile.

L'air est assimilé à un gaz parfait : γ = 1,4 et r = 287 J/kg.K

2 REPONSE

1) $V = M.C = M.\sqrt{\frac{\gamma.P}{\rho}}$ A.N. V = 290,56 m/s = 1046,02 Km/h

2) $P_i = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.P$ A.N : $P_i = \left(1+\frac{1,4-1}{2}.0,95^2\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}}.0,2332 = 0,416\,bar$

$T_i = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2\right).T$ or $r.T = \frac{p}{\rho}$ (air considéré gaz parfait) $\Rightarrow$

$T = \frac{p}{\rho.r} = \frac{0,2332}{0,349.287} = 232,82\,°K$ donc $T_i = \left(1+\frac{1,4-1}{2}.0,95^2\right).232,82 = 274,84\,°K$

Exercice N°3: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 23-06-2003

1 ENONCE

Un corps céleste en chute libre, freiné par les couches d'air de la haute atmosphère tombe sur terre. A une altitude de 10 km :

- la vitesse du corps V=3000 m/s,
- la température de l'air T=223^0 K,
- la masse volumique de l'air $\rho = 0,412\ kg/m^3$
- la pression de l'air P=0,265 bar.

On donne $\gamma = 1,4$.

Travail demandé :

1) Calculer la vitesse du son C.

2) Déterminer le nombre de Mach M.

3) Quelle est la nature de l'écoulement d'air autour du corps ?

4) Appliquer le théorème de Saint-Venant pour calculer la température T_i et la pression P_i de l'air au point d'arrêt.

2 REPONSE

1) Célérité du son : $C = \sqrt{\gamma.\frac{P}{\rho}}$ A.N. $C = \sqrt{1,4.\frac{26500}{0,412}} = 300\ m/s$

2) Nombre de Mach : $M = \frac{V}{C}$ A.N. $M = \frac{3000}{300} = 10$

3) M>1 donc l'écoulement est **supersonique**.

4) Température d'arrêt $T_i = T.\left(1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2\right)$ A.N. $T_i = 223.\left(1+\frac{1,4-1}{2}.100\right) = 4683\ ^0K$

5) Pression d'arrêt :

$P_i = P.\left(1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ A.N. $P_i = 26500.\left(1+\frac{1,4-1}{2}.100\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 11246\ Pa$

Exercice N°4: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 15-01-2004

1 ENONCE

Un réservoir contient de l'air comprimé à une pression P_i= 4 bar, supposée pression d'arrêt à l'état initial. L'ouverture d'une vanne dans ce réservoir provoque la détente de l'air vers l'extérieur sous forme d'un jet ayant un diamètre d = 5 mm.

Les paramètres extérieurs du jet d'air à l'état final sont :

- Pression P= 1 bar,
- Température T=25^0 C,

On donne $\gamma = 1,4$ et r=287 J/Kg.^{0}K.

1) Calculer la vitesse du son C à l'extérieur du réservoir en (m/s).

2) Déterminer la masse volumique ρ de l'air à l'extérieur du réservoir en (kg/m^3).

(On suppose que l'air est un gaz parfait.)

3) Ecrire l'équation de Saint-Venant, en terme de rapport de pression, entre un point d'arrêt et un point sur le jet d'air.

4) En déduire le nombre de Mach M au niveau du jet d'air.

5) Quelle est la nature de l'écoulement ?

6) Calculer la vitesse d'écoulement V du jet d'air en (m/s).

7) En déduire le débit massique q_m (kg/s).

2 REPONSE

1) Célérité du son : $C = \sqrt{\gamma.rT}$ A.N. $C = \sqrt{1,4.287.298} = 346\ m/s$

2) Masse volumique : $\rho = \frac{P}{rT}$ A.N. $\rho = \frac{10^5}{287.298} = 1,169\ kg/m^3$

3) Equation de Saint-Venant $1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2 = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

4) Nombre de Mach : $M = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}.\left[\left(\frac{p_i}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}$ A.N. $M = 1{,}558$

5) M>1 donc l'écoulement est supersonique.

6) Vitesse d'écoulement : $V = M.C$ A.N. $V = 1{,}558.346 = 549{,}48\ m/s$

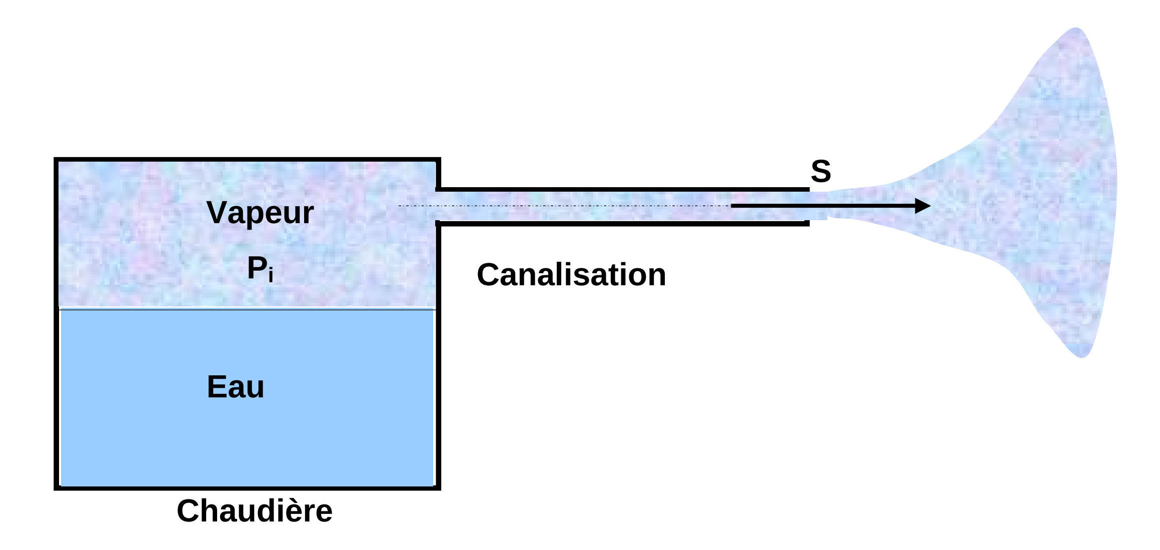
7) Débit massique : $q_m = \rho S.V = \rho.\frac{\pi.d^2}{4}.V$

A.N. $q_m = 1{,}169.\frac{\pi.0{,}005}{4}.549{,}448 = 2{,}52\ kg/s$

Exercice N°5: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 24-06-2004

1 ENONCE

La figure ci-dessous représente une chaudière qui produit de la vapeur d'eau à un débit massique q_m=13,4 kg/s.



Par une canalisation cylindrique, la vapeur arrive dans une section S de diamètre d=10 cm à une pression P=15 bar et une température T=541 °K.

On donne les caractéristiques de la vapeur d'eau :

- γ =1,3.

- r=462 J/kg°K.

Travail demandé:

1) On suppose que la vapeur est un gaz parfait, calculer la masse volumique ρ de la vapeur d'eau en sortie de la chaudière.

2) Déterminer la vitesse d'écoulement V.

3) Calculer la célérité du son C.

4) En déduire le nombre de Mach M. Préciser la nature de l'écoulement.

5) Ecrire l'équation de Saint-Venant en terme de rapport de pression, et calculer la pression d'arrêt Pi à l'intérieur de la chaudière.

2 REPONSE

1) Masse volumique de la vapeur : $\rho = \frac{P}{rT}$ A.N. $\rho = \frac{15.10^5}{462.541} = 6\ kg/m^3$

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4.q_m}{\pi.d^2.\rho}$ A.N. $V = \frac{4.13,4}{\pi.0,1^2.6} = 284,356\ m/s$

3) Célérité du son: $c = \sqrt{\gamma.r.T}$ A.N. $c = \sqrt{1,3.462.541} = 570,021\ m/s$

4) Nombre de Mach : $M = \frac{V}{C}$ A.N. $M = \frac{284,356}{570,021} = 0,5$

M<1 donc l'écoulement est **subsonique**.

5) Equation de Saint – Venant : $1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$

La pression d'arrêt : $P_i = P.\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}.M^2\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}$

A.N. $P_i = 15.10^5.\left(1 + \frac{1,3 - 1}{2}.0,5^2\right)^{\left(\frac{1,3}{1,3-1}\right)} = 1759434\ Pa = 17,594\ bar$

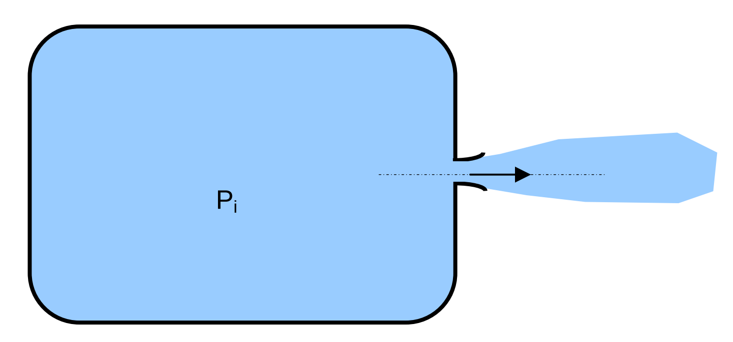
Exercice N°6: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 17-01-2005

1 ENONCE

De l'air comprimé contenu dans un grand réservoir s'échappe vers l'extérieur à travers un orifice à un nombre de Mach M=0,77.

La détente se produit dans l'atmosphère où règne une pression $P = P_{atm} = 1,014$ bar.

On donne le rapport des chaleurs massiques : $\gamma = 1,4$.



Travail demandé :

1) En appliquant l'équation de Saint- Venant , déterminer la pression P_i (en bar) à l'intérieur du réservoir.

2) A partir de quelle pression P_i, l'écoulement devient supersonique ?

2 REPONSE

1) Equation de Saint-Venant : $1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2=\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$ donc

$$P_i=P.\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}$$

A.N. $P_i=1{,}014.10^5.\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}.0{,}77^2\right)^{\left(\frac{1{,}4}{1{,}4-1}\right)}=150097{,}21 \quad Pa=1{,}5 \quad bar$

2) $M>1\Rightarrow P_i>P.\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}$

A.N. $P_i>1{,}014.10^5.\left(\frac{1{,}4+1}{2}\right)^{\left(\frac{1{,}4}{1{,}4-1}\right)}=191943\approx 2 \quad bar$

Exercice N°7: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 19-06-2006

1 ENONCE

L'azote est comprimé dans une bouteille dans laquelle règne une pression d'arrêt P_i = 3 bar. Il s'échappe à travers un orifice vers l'extérieur ou la pression ambiante est P= 1 bar.

On donne $\gamma=1{,}4$.

1) En appliquant l'équation de Saint-Venant, déterminer le nombre de Mach M.

2) Préciser la nature de l'écoulement.

2 REPONSE

1) Théorème de Saint-Venant : $1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2=\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Nombre de Mach $\boxed{M=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}.\left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]}}$ A.N. $\boxed{M=\sqrt{\frac{2}{1,4-1}.\left[\left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}-1\right]}=1,357}$.

2) M>1 donc l'écoulement est supersonique.

Exercice N°8: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 18-06-2007

1 ENONCE

De l'air, supposé gaz parfait, s'échappe par la valve d'une chambre à air d'un pneu. La pression à l'intérieur de la chambre à air est P_i = 1,7 bar. On suppose que la détente de l'air, s'effectue vers l'extérieur à une pression P=1 bar et une température ambiante T=25 °C.

On donne les caractéristiques de l'air suivantes :

- r= 287 J/kg°K,
- γ=1,4.

Travail demandé :

1) Calculer la célérité du son.

2) En appliquant l'équation de Saint-Venant, déterminer le nombre de Mach.

3) Déterminer la vitesse d'échappement V de l'air.

2 REPONSE

1) $\boxed{c=\sqrt{\gamma.r.T}}$ A.N. : $\boxed{c=\sqrt{1,4.287.298}=346 \quad m/s}$

2) Equation de Saint-Venant :

$1+\frac{\gamma-1}{2}.M^2=\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$ Équivaut à $\boxed{M=\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}-1\right)}}$

A.N. $M = \sqrt{\frac{2}{1,4-1}\left(\left(\frac{1,7}{1}\right)^{\left(\frac{1,4-1}{1,4}\right)}-1\right)} = 0,9$

3) $V = M.c \Rightarrow V = 0,9.346 = 311,4\ m/s$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dynamique des fluides.
Inge L. Ryhming
Presse Polytechniques et Universitaires Romandes

[2] Mécanique de fluides – Prépas PC-PSI
Céline Anthoine – Guillaume Levèvre – Samuel Marque- 1999

[3] Mécanique des fluides.
Cours, exercices et problèmes corrigés.
Classes préparatoires- Premier cycle universitaire.
Christian Grossetête -1999

[4] Hydraulique.
Cours et Exercices.
Souha Bahlous El Ouafi
Centre de Publication Universitaire (CPU) 2002

[5] Mécanique des fluides.
Comolet (Masson)

[6] Mécanique des fluides incompressibles
Mohamed MAALEJ
Centre de Publication Universitaire (CPU) 2001

P

Cet ouvrage est une introduction à la mécanique des fluides. Il est conforme aux programmes de formation des techniciens supérieurs en maintenance industrielle ou en génie mécanique. Il est destiné aux étudiants des Instituts Supérieurs des Etudes Technologiques, aux enseignants et aux auditeurs de la formation continue. Centré sur les lois et leurs applications en statique et en dynamique des fluides, Il fournis aux techniciens supérieurs les notions élémentaires nécessaires pour dimensionner plusieurs appareils (réservoirs, tuyauterie, pompe, turbine, distributeur, vérins etc.) qu'il rencontrent dans la vie active.

Accompagné de 70 exercices corrigés d'une façon détaillée, cet ouvrage rassemble un volume d'applications pratiques intéressant qui en font une bonne préparation aux examens, aux concours et la vie professionnelle.



Riadh BEN HAMOUDA

Ingénieur principal de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis,
Diplômé de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace ENSAE- SUP'AERO de Toulouse.
Enseignant agrégé en Génie Mécanique et Technologue à l'Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Djerba.

ISBN : 978-9973-37-494-3 Prix : 12 dinards